



**„EUROELEKTRA”**  
**Ogólnopolska Olimpiada Wiedzy Elektrycznej i Elektronicznej**  
**Rok szkolny 2021/2022**

**Zadania z elektrotechniki na zawody II stopnia**

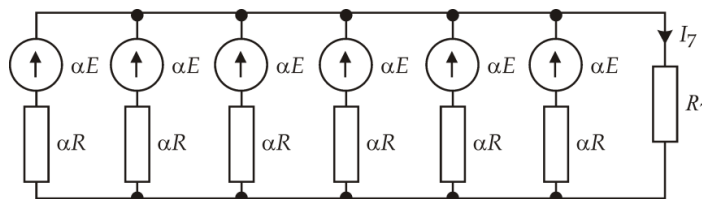
**Instrukcja dla zdającego**

1. Czas trwania zawodów: 120 minut.
2. II stopień Olimpiady zawiera 5 zadań otwartych.
3. Należy podać poprawną odpowiedź wraz z tokiem rozwiązania.
4. Za każdą prawidłową odpowiedź uzyskuje się maksymalnie 10 punktów. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za 5 zadań to 50 punktów.
5. Można korzystać z przyborów do pisania, rozdawanych kart czystopisu i brudnopisu, kalkulatorów i tablic matematycznych. Korzystanie z notebooków, tabletów, telefonów komórkowych, smartfonów, smartwatchy, kalkulatorów programowalnych, itp. jest zabronione.

**Życzymy powodzenia!**

**Zadanie 1**

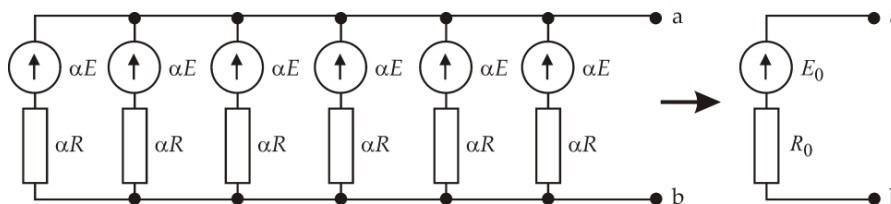
Odbiornik o rezystancji  $R_7 = 6 \Omega$  zasilany jest przez 6 połączonych równolegle źródeł o jednakowych napięciach (rysunek 1) wynoszących  $(\alpha E)$  i rezystancjach wynoszących  $(\alpha R)$ . Przyjmując, że  $E = 4 \text{ V}$  oraz  $R = 2 \Omega$ , dobrać współczynnik rzeczywisty  $\alpha$  tak, aby prąd oznaczony jako  $I_7$  wynosił 3 A.



Rys. 1

**Rozwiązanie zadania 1**

Układ równoległych 6 źródeł rzeczywistych o jednakowych parametrach należy zastąpić (korzystając z twierdzenia Thevenina) dwójnikiem równoważnym (źródłem zastępczym), utworzonym z szeregowo połączonych dwóch elementów idealnych:  $E_0$  i  $R_0$ .



Rys. 1.1

**Obliczenie  $E_0$**

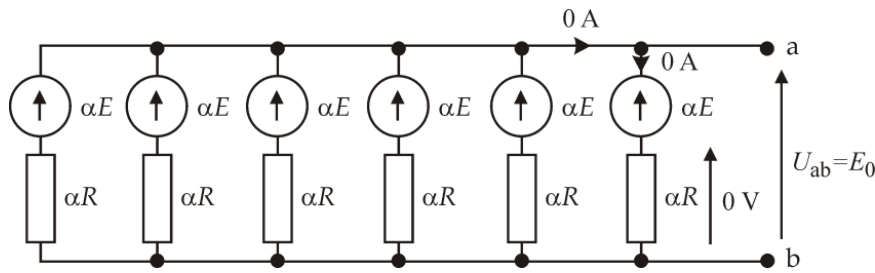
Ponieważ obwód nieobciążony odbiornikiem  $R_7$ , tworzy 6 gałęzi o jednakowych parametrach, połączonych równolegle, w obwodzie tym wszystkie prądy mają wartość równą 0. Zatem

wyprowadzając zaciski ab jak na rysunku, różnica potencjałów pomiędzy nimi jest równa napięciu każdego ze źródeł w obwodzie, stąd:

$$U_{ab} = \alpha E$$

zatem napięcie  $E_0$  – pierwszy z parametrów źródła zastępczego jest równe napięciu  $U_{ab}$  a w układzie źródeł nieobciążonych:

$$E_0 = U_{ab} = \alpha E$$

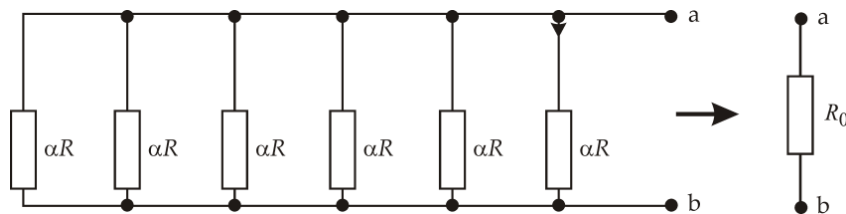


Rys. 1.2

### Obliczenie rezystancji $R_0$

Rezystancja występująca w źródle zastępczym obliczana jest po tzw. upasywnieniu obwodu, tj. założeniu, że wszystkie napięcia źródeł występujące w obwodzie mają wartość zerową, co jest równoznaczne z zastąpieniem ich zwarciami. Wówczas rezystancja zastępcza dwójnika wynosi:

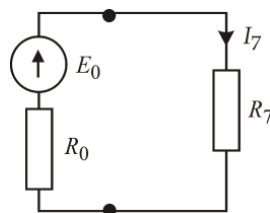
$$R_0 = \frac{\alpha R}{6}$$



Rys. 1.3

### Dobranie współczynnika $\alpha$

W celu ostatecznego uzyskania rozwiązania zadania, wykorzystane zostaje źródło zastępcze, obciążone odbiornikiem o rezystancji  $R_7$ .



Rys. 1.4

Pozwala to na bezpośrednie powiązanie prądu  $I_7$  z wyznaczanym współczynnikiem.

$$I_7 = \frac{E_0}{R_0 + R_7}$$

co po podstawieniu daje:

$$I_7 = \frac{\alpha E}{\frac{\alpha R}{6} + R_7}$$

przekształcając wzór uzyskano:

$$\frac{\alpha R}{6} I_7 + R_7 I_7 = \alpha E$$

ostatecznie:

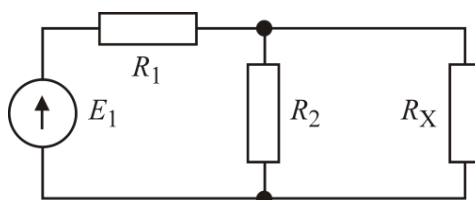
$$\alpha = \frac{R_7 I_7}{E - \frac{R I_7}{6}}$$

Po podstawieniu danych:

$$\alpha = \frac{6 * 3}{4 - \frac{2 * 3}{6}} = 6$$

## Zadanie 2

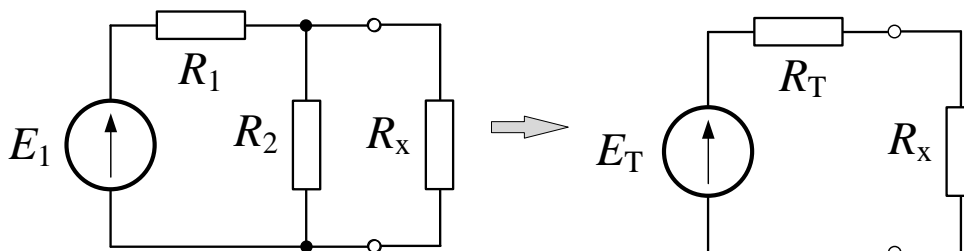
Obwód elektryczny przedstawiony jest na rysunku 2. Przy jakiej wartości rezystancji  $R_X$  moc przetwarzana w elemencie  $R_X$  wynosi 9 W? Dane:  $E_1 = 16$  V,  $R_1 = 4$   $\Omega$ ,  $R_2 = 12$   $\Omega$ .



Rys. 2

## Rozwiązanie zadania 2

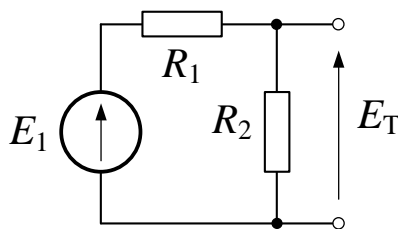
Obwód elektryczny przedstawiony na rysunku 2.1 zgodnie z twierdzeniem Thevenina można zastąpić przez równoważny obwód elektryczny składający się z napięcia źródłowego  $E_T$  oraz rezystora o rezystancji  $R_T$ .



Rys. 2.1

## Napięcie źródłowe $E_T$

Napięcie źródłowe  $E_T$  jest równe napięciu między rozwartymi zaciskami obwodu elektrycznego przedstawione na rysunku 2.2.



Rys. 2.2

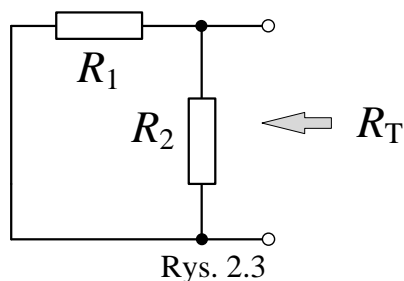
Napięcie  $E_T$  można wyznaczyć z następującej zależności

$$E_T = \frac{E_1}{R_1 + R_2} R_2$$

$$E_T = \frac{16}{4 + 12} 12 = 12 \text{ V}$$

## Wyznaczenie wartości rezystancji $R_T$

Wartość rezystancji  $R_T$  jest równa rezystancji określonej przy założeniu, że wymuszenia w obwodzie elektrycznym nie działają. Obwód elektryczny do wyznaczenia rezystancji został przedstawiony na rysunku 2.3.



Rys. 2.3

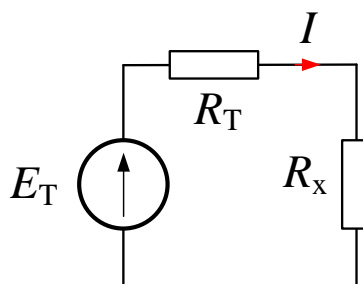
Rezystancję  $R_T$  można wyznaczyć z następującej zależności

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \cdot 12}{4 + 12}$$

$$R_T = 3 \Omega$$

### Wyznaczenie wartości rezystancji $R_x$

Obwód do wyznaczenia wartości rezystancji  $R_x$  został przedstawiony na rysunku 2.4.



Rys. 2.4

Z treści zadania wiadomo, że moc przetwarzana w elemencie  $R_x$  wynosi 9 W. Moc przetwarzaną w tym elemencie można wyrazić następującą zależnością

$$P_x = I^2 R_x$$

$$P_x = \left( \frac{E_T}{R_T + R_x} \right)^2 R_x$$

Po uporządkowaniu równania otrzymujemy

$$P_x R_x^2 + (2P_x R_T - E_T^2) R_x + P_x R_T^2 = 0$$

Po podstawieniu danych

$$9R_x^2 + (2 \cdot 9 \cdot 3 - 12^2) R_x + 9 \cdot 9 = 0$$

$$9R_x^2 - 90R_x + 81 = 0 : 9$$

$$R_x^2 - 10R_x + 9 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

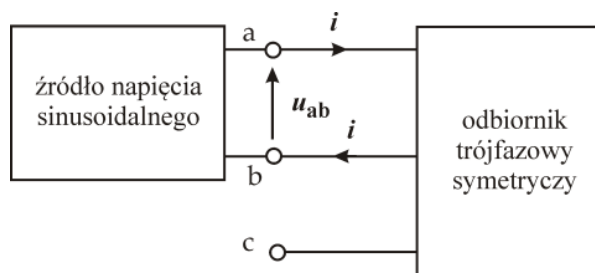
$$R_{x1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - 8}{2 \cdot 1} = \frac{10 - 8}{2} = 1 \Omega$$

$$R_{x2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + 8}{2 \cdot 1} = \frac{10 + 8}{2} = 9 \Omega$$

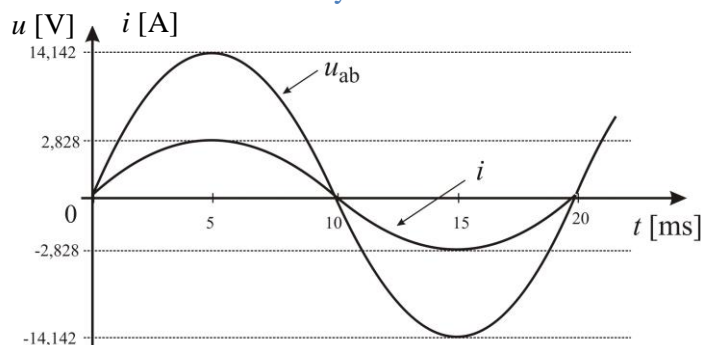
Moc przetwarzana w elemencie  $R_x$  będzie wynosiła 9 W w przypadku, gdy wartość rezystancji  $R_x$  będzie wynosiła 1  $\Omega$  lub 9  $\Omega$ .

### Zadanie 3

Dwa wybrane zaciski odbiornika trójfazowego symetrycznego połączonego w gwiazdę zostały połączone ze źródłem napięcia sinusoidalnego jak na rysunku 3. Wartości chwilowe napięcia pomiędzy zaciskami oraz prąd w przewodach łączących źródło z odbiornikiem przedstawia rysunek 4. Amplituda napięcia  $u_{ab}$  wynosi 14,142 V, a amplituda prądu  $i$  wynosi 2,828 A.

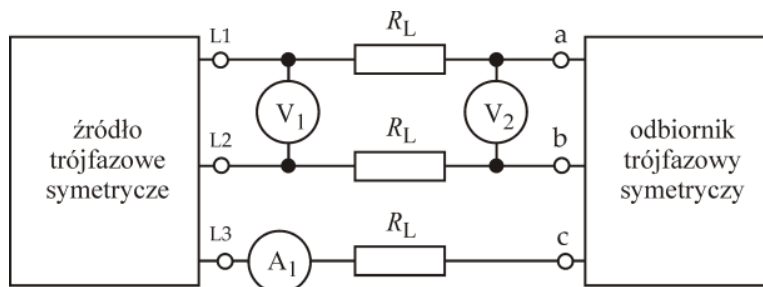


Rys. 3



Rys. 4

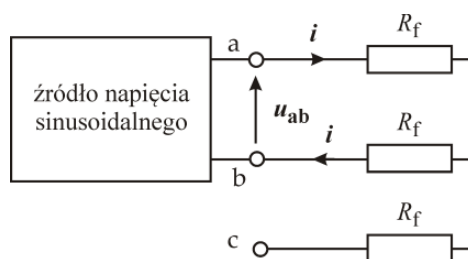
Odbiornik został następnie połączony ze źródłem trójfazowym symetrycznym za pomocą kabla, w przypadku, którego rezystancja każdego z przewodów  $R_L$  wynosi  $0,5 \Omega$ . Wyznaczyć moc czynną odbiornika trójfazowego oraz wskazanie amperomierza  $A_1$  i woltomierza  $V_2$  w układzie z rysunku 5, jeżeli wiadomo, że woltomierz  $V_1$  pokazuje 150 V (wartość skuteczna).



Rys. 5

### Rozwiązanie zadania 3

Na podstawie danych z treści zadania należy utworzyć model odbiornika trójfazowego. Z wykresu prezentowanego na rysunku 4 wynika, że napięcie i prąd są w fazie, zatem odbiornik ma charakter rezystancyjny i każdej z faz zostaje przypisana rezystancja oznaczona jako  $R_f$ . Na rysunku 3.1 przedstawiono schemat analizowanego obwodu. Wartości skuteczne napięcia  $u_{ab}$  oraz prądu  $i$  wynoszą odpowiednio:  $U_{SK} = 10 \text{ V}$  oraz  $I_{SK} = 2 \text{ A}$ .



Rys. 3.1

Analizując obwód elektryczny przedstawiony na rysunku 3.1 można wyznaczyć rezystancję oznaczona jako  $R_f$ , korzystając z następujących zależności:

$$I_{SK} = \frac{U_{SK}}{R_f + R_f}$$

stąd:

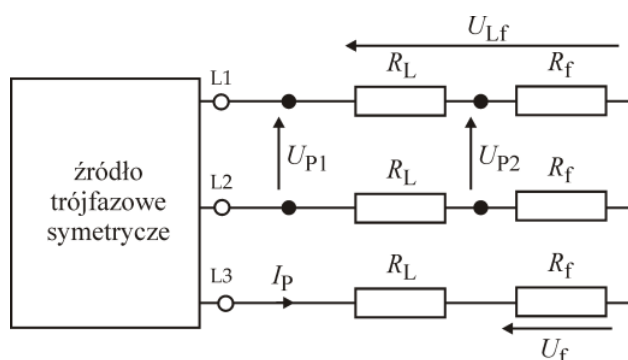
$$R_f = \frac{U_{SK}}{2I_{SK}} = \frac{10}{2 * 2} = 2,5 \Omega$$

Poszukując rozwiązania dla układu trójfazowego z rysunku 5, należy wykorzystać wskazanie woltomierza  $V_1$ , któremu odpowiada napięcie przewodowe w miejscu połączenia źródła i kabla zasilającego, i tak:

$$V_1 \rightarrow U_{P1} = 150 \text{ V}$$

W celu uzyskania prądu przewodowego (w przewodach łączących źródło z odbiornikiem), należy skorzystać z faktu szeregowego połączenia rezystancji przewodów zasilających i faz odbiornika. Napięcie na szeregowym połączeniu tych elementów (oznaczone na rysunku 3.2 jako  $U_{Lf}$ ) można powiązać z napięciem przewodowym  $U_{P1}$ , i tak:

$$U_{Lf} = \frac{U_{P1}}{\sqrt{3}} = \frac{150}{\sqrt{3}} = 86,60 \text{ V}$$



Rys. 3.2

Zatem prąd przewodowy jest równy:

$$I_p = \frac{U_{Lf}}{R_L + R_f} = \frac{86,60}{0,5 + 2,5} = 28,87 \text{ A}$$

Powyższy prąd przewodowy odpowiada wskazaniu amperomierza:

$$A_1 \rightarrow I_p = 28,87 \text{ A}$$

Prąd przewodowy, w przypadku konfiguracji odbiornika w gwiazdę jest równy prądowi fazowemu odbiornika, co pozwala na obliczenie napięcia fazowego odbiornika skojarzonego w gwiazdę:

$$U_f^Y = U_f = R_f * I_f = R_f * I_p = 2,5 * 28,87 = 72,17 \text{ V}$$

Napięcie przewodowe w miejscu połączenia kabla z odbiornikiem uzyskane zostaje na podstawie powyższego napięcia fazowego, i tak:

$$U_{P2} = \sqrt{3}U_f^Y = 125 \text{ V}$$

Wskazanie woltomierza  $V_2$  wynosi zatem 125 V.

Moc czynna odbiornika trójfazowego (symetrycznego) może zostać obliczona jako potrojona moc jednej z faz:

$$P_{odb} = 3P_f = 3U_f I_f \cos \varphi_{odb}$$

gdzie:  $\cos \varphi_{odb} = 1$ .

Drugi sposób to posłużenie się rezystancją fazy i prądem fazowym odbiornika, wówczas:

$$P_{\text{odb}} = 3R_f I_f^2$$

lub stosowanym powszechnie w obliczeniach związanych z sieciami elektroenergetycznymi wzorem wiążącym napięcie przewodowe i prąd przewodowy, tj. w tym przypadku:

$$P_{\text{odb}} = \sqrt{3} U_{P2} I_P \cos \varphi_{\text{odb}}$$

Każdy ze sposobów daje moc czynną odbiornika równą: 6250 W.

#### Zadanie 4

Transformator jednofazowy o danych znamionowych: moc znamionowa  $S_N = 12 \text{ kVA}$ ; napięcie znamionowe strony GN (strona 1)  $U_{1N} = 400 \text{ V}$ ; napięcie znamionowe strony dolnej DN (strona 2)  $U_{2N} = 230 \text{ V}$ ; częstotliwość znamionowa  $f_N = 50 \text{ Hz}$ . Podczas pomiarów tego transformatora uzyskano następujące wyniki:

- pomiary w stanie jałowym (zasilana strona 2):
  - napięcie zasilania  $U_{20} = U_{2N}$  o częstotliwości  $f_N$ ;
  - prąd stanu jałowego  $I_{20} = 3,5 \text{ A}$ ;
  - moc czynna w stanie jałowym  $P_{20} = 130 \text{ W}$ .
- pomiary w stanie zwarcia (zasilana strona 1, zwarcie po stronie 2):
  - napięcie zasilania  $U_{1Z} = 22 \text{ V}$ ;
  - prąd w stanie zwarcia  $I_{1Z} = 27 \text{ A}$ ;
  - moc czynna w stanie zwarcia  $P_{2Z} = 95 \text{ W}$ .

Należy obliczyć parametry schematu zastępczego typu T transformatora sprowadzone na stronę 1 oraz narysować ten schemat. W obliczeniach należy przyjąć następujące założenia upraszczające:  $R_1 = R_2'$  oraz  $X_1 = X_2'$ .

#### Rozwiązanie zadania 4

Prąd znamionowy strony 1:

$$I_{1N} = \frac{S_N}{U_{1N}} = \frac{12000}{400} = 30,0 \text{ A}$$

Prąd znamionowy strony 2:

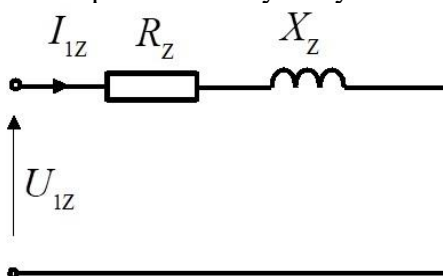
$$I_{2N} = \frac{S_N}{U_{2N}} = \frac{12000}{230} = 52,2 \text{ A}$$

Przekładnia:

$$n = \frac{U_{1N}}{U_{2N}} = \frac{400}{230} = 1,74$$

#### Wyznaczanie parametrów w stanie zwarcia

Wykonując obliczenia parametrów w stanie zwarcia zakłada się, że prąd magnesujący jest bardzo mały w stosunku do prądu płynącego przez uzwojenia transformatora podczas próby zwarcia oraz straty w rdzeniu są pomijalnie małe w stosunku do strat w uzwojeniach. Schemat zastępczy transformatora w stanie zwarcia został przedstawiony na rysunku 4.1.



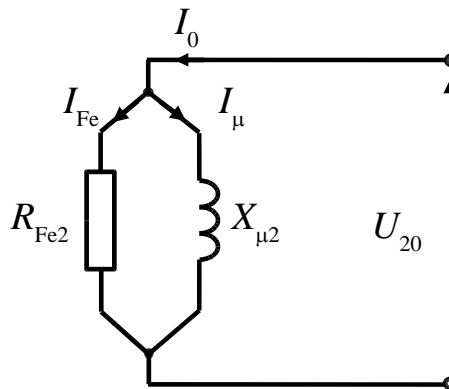
Rys. 4.1

Na podstawie wyników pomiarów uzyskanych z próby stanu zwarcia można wyznaczyć:

- impedancję zwarcia:  $Z_Z = \frac{U_{1Z}}{I_{1Z}} = \frac{22}{27} = 0,815 \Omega$
- rezystancję zwarcia:  $R_Z = \frac{P_{1Z}}{I_{1Z}^2} = \frac{95}{27^2} = 0,130 \Omega$
- reaktancję zwarcia:  $X_Z = \sqrt{Z_Z^2 - R_Z^2} = \sqrt{0,815^2 - 0,130^2} = 0,805 \Omega$
- reaktancję rozproszenia:  $X_1 = X_2' = \frac{X_Z}{2} = \frac{0,806}{2} = 0,403 \Omega$
- rezystancję uzwojeń:  $R_1 = R_2' = \frac{R_Z}{2} = \frac{0,130}{2} = 0,065 \Omega$

### Wyznaczanie parametrów w stanie jałowym

Wykonując obliczenia parametrów w stanie jałowym zakłada się, że spadki napięcia na rezystancji uzwojenia  $R_2$  oraz reaktancji rozproszenia  $X_2$  są bardzo małe w porównaniu z napięciem  $U_{20} = U_{2N}$  na zaciskach i dlatego można je pominąć w dalszym rozważaniu. Schemat zastępczy transformatora w stanie jałowym został przedstawiony na rysunku 4.2.



Rys. 4.2

W celu wyliczenia rezystancji reprezentującej straty mocy w rdzeniu transformatora  $R_{Fe2}$  wyznaczonej dla strony 2 należy skorzystać z następującej zależności

$$P_{20} = \frac{U_{20}^2}{R_{Fe2}}$$

$$\Downarrow$$

$$R_{Fe2} = \frac{U_{20}^2}{P_{20}} = \frac{230^2}{130} = 407 \Omega$$

Reaktancję  $X_{\mu2}$  można wyznaczyć z następującej zależności  $X_{\mu2} = \frac{U_{20}}{I_{\mu}}$

Z powyższej zależności będzie można skorzystać, gdy zostanie wyznaczony prąd magnesujący  $I_{\mu}$

$$I_{\mu} = I_{20} \cdot \sin \varphi_0$$

Wartość  $\sin \varphi_0$  można obliczyć z

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_{20}}{U_{20} \cdot I_{20}} = \frac{130}{230 \cdot 3,5} = 0,161$$

$$\Downarrow$$

$$\sin \varphi_0 = 0,987$$

Po wyznaczeniu brakujących wielkości można przejść do wyznaczenia reaktancji  $X_{\mu2}$  wyznaczonej dla strony 2

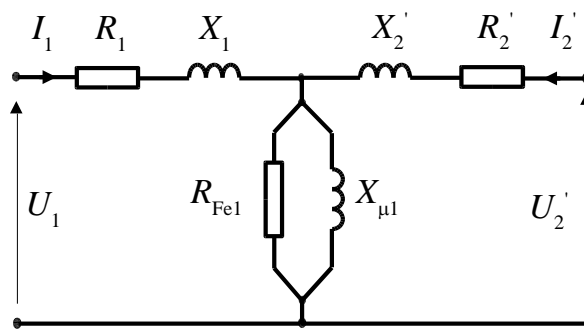
$$I_{\mu} = I_{20} \cdot \sin \varphi_0 = 3,5 \cdot 0,987 = 3,45 \text{ A}$$

$$X_{\mu2} = \frac{U_{20}}{I_{\mu}} = \frac{230}{3,45} = 66,7 \Omega$$



### Schemat zastępczy typu T transformatora jednofazowego dla strony 1

Schemat zastępczy typu T transformatora jednofazowego dla strony 1 został przedstawiony na rysunku 4.3



Rys. 4.3

Rezystancja  $R_{Fe}$  oraz reaktancja  $X_{\mu}$  zostały one określone dla strony 2 (ozn.  $R_{Fe2}$  i  $X_{\mu2}$ ), w celu wyznaczenia tych parametrów od strony 1 (ozn.  $R_{Fe1}$  i  $X_{\mu1}$ ), należy przemnożyć te wielkości przez kwadrat przekładnik transformatora, według następujących zależności:

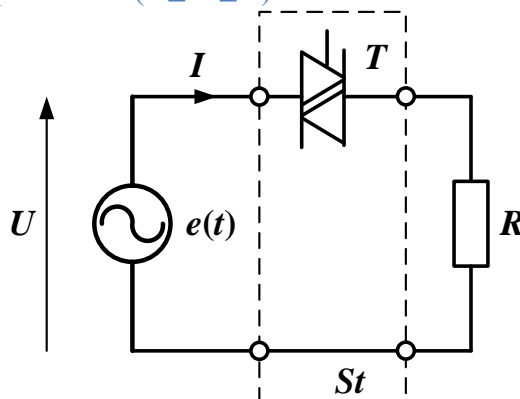
$$\begin{aligned} R_{Fe1} &= R_{Fe2} \cdot n^2 = 407 \cdot 1,74^2 = 1232 \, \Omega \\ X_{\mu1} &= X_{\mu2} \cdot n^2 = 66,7 \cdot 1,74^2 = 202 \, \Omega \end{aligned}$$

Parametry schematu zastępczego:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,065 \, \Omega \\ R_2' &= 0,065 \, \Omega \\ X_1 &= 0,403 \, \Omega \\ X_2' &= 0,403 \, \Omega \\ R_{Fe1} &= 1232 \, \Omega \\ X_{\mu1} &= 202 \, \Omega \end{aligned}$$

### Zadanie 5

Dany jest jednofazowy sterownik *St* mocy z obciążeniem rezystancyjnym  $R$  zasilany ze źródła napięcia sinusoidalnie przemiennego  $e(t)$  o wartości skutecznej  $U$  (rysunek 6). Triak  $T$  sterownika mocy jest sterowany fazowo. Moment załączenia triaka jest określony kątem  $\alpha$  liczonym od przejścia przebiegu napięcia zasilania przez zero ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ).



Rys. 6

Zakładając, że:

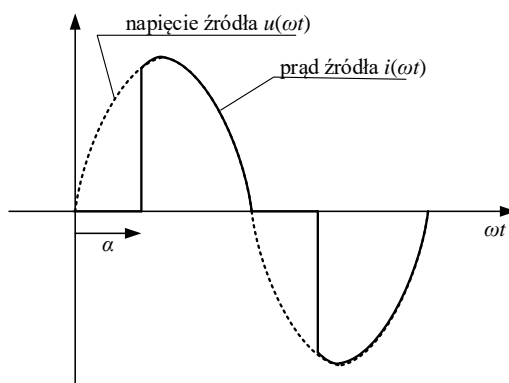
1. źródło napięcia ma zerową impedancję wewnętrzną,
2. triak  $T$  jest łącznikiem idealnym tj. ma zerową rezystancję w stanie załączenia, nieskończona rezystancję w stanie blokowania i zerowe czasy przełączania,

należy obliczyć współczynnik mocy  $PF$  sterownika, jeśli kąt  $\alpha$  załączania triaka wynosi  $2\pi/3$  ( $120^\circ$ ).

**WSKAZÓWKA:**  $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

## Rozwiązanie zadania 5

Przebiegi napięć i prądu w obwodzie ze sterownikiem mocy są przedstawione na rysunku 5.1.



Rys. 5.1

Współczynnik mocy  $PF$  (Power Factor) jest zdefiniowany jako stosunek mocy czynnej  $P$  do mocy pozornej  $S$ :

$$PF = \frac{P}{S}$$

Moc czynna  $P$  jest zdefiniowana jako średnia mocy chwilowych w okresie:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

W przypadku zadania moc  $P$  wynosi:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sqrt{2}U \sin \omega t \cdot \frac{\sqrt{2}U}{R} \sin \omega t \cdot d\omega t = \frac{U^2}{R} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sin^2 \omega t \cdot d\omega t$$

Po obliczeniu otrzymuje się zależność:

$$P = \frac{U^2}{R} \left( 1 - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi} \right)$$

Moc pozorna  $S$  jest zdefiniowana jako iloczyn skutecznych wartości napięcia ( $U$ ) i prądu ( $I$ ):

$$S = U \cdot I$$

Wartość skuteczna napięcia jest podana bezpośrednio w zadaniu.

Ogólnie, wartość skuteczna prądu  $I$  jest zdefiniowana następująco:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

W przypadku danych z zadania:

$$I = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \left( \frac{\sqrt{2}U}{R} \right)^2 \sin^2 \omega t \cdot d\omega t} = \frac{\sqrt{2}U}{R} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sin^2 \omega t \cdot d\omega t}$$

Po obliczeniu otrzymuje się zależność:

$$I = \frac{U}{R} \sqrt{1 - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi}}$$

Po wyznaczeniu wartości skutecznej prądu  $I$  można obliczyć moc pozorną na podstawie zależności:

$$S = U \cdot I = \frac{U^2}{R} \sqrt{1 - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi}}$$

Następnie można obliczyć współczynnik  $PF$  z następującej zależności:

$$PF = \frac{P}{S} = \frac{\frac{U^2}{R} \left(1 - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi}\right)}{\frac{U^2}{R} \sqrt{1 - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi}}} = \sqrt{1 - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi}}$$

Po podstawieniu danych z zadania tj.  $\alpha = 2\pi/3$  do powyżej zależności otrzymuje się

$$PF = \sqrt{1 - \frac{\frac{4}{3}\pi - \sin \frac{4}{3}\pi}{2\pi}} = \sqrt{\frac{2\pi - \frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\pi}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\pi}} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}} = 0,442$$

**Opracowali:**

dr inż. Paweł Dybowski  
dr inż. Zbigniew Mikoś  
dr inż. Przemysław Syrek  
mgr inż. Artur Gancarz

**Sprawdził:**

dr inż. Zbigniew Kłosowski

**Zatwierdzili:**

Przewodniczący Rady Naukowej Olimpiady  
dr hab. inż. Jan Mućko, prof. PBŚ  
Przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady  
dr hab. inż. Tomasz Talaśka, prof. PBŚ