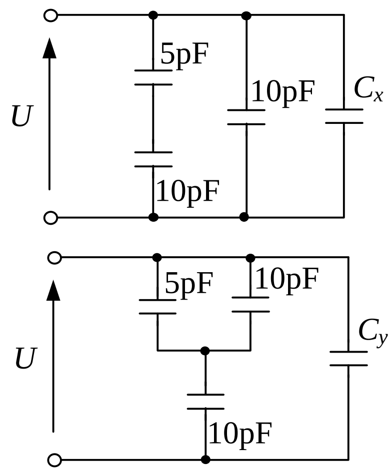
„EUROELEKTRA”
Ogólnopolska Olimpiada Wiedzy Elektrycznej i Elektronicznej
Rok szkolny 2010/2011
Odpowiedzi do zadań dla grupy elektrycznej na zawody II. stopnia

Zadanie 1

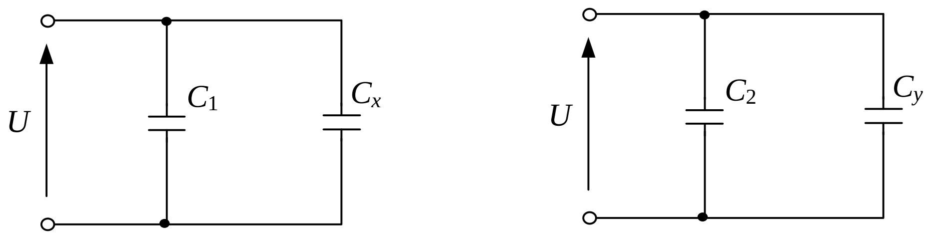
Na rys. 1 przedstawiono dwa układy kondensatorów. Dobrać tak pojemności C_x i C_y, aby oba układy włączone do tego samego źródła napięcia stałego $U = 100\,\mathrm{V}$ naładowały się takim samym całkowitym ładunkiem $Q = 10^{-8}\,\mathrm{C}$.



Rys. 1

Odpowiedź do zadania 1:

Układy kondensatorów można przedstawić w postaci uproszczonej jak na rys. 1.1



Rys. 1.1

gdzie

$$C_1 = \left(10 + \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}}\right) \cdot 10^{-12} = \frac{40}{3}\,\mathrm{pF}$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{5+10} + \frac{1}{10}}\right) \cdot 10^{-12} = 6\,\mathrm{pF}\,.$$

Ładunki kondensatorów o pojemnościach C_1 i C_2 przy napięciu $U = 100\,\mathrm{V}$ wynoszą:

$$Q_1 = C_1 \cdot U = \frac{40}{3} \cdot 10^{-12} \cdot 110 = 0{,}146 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$$

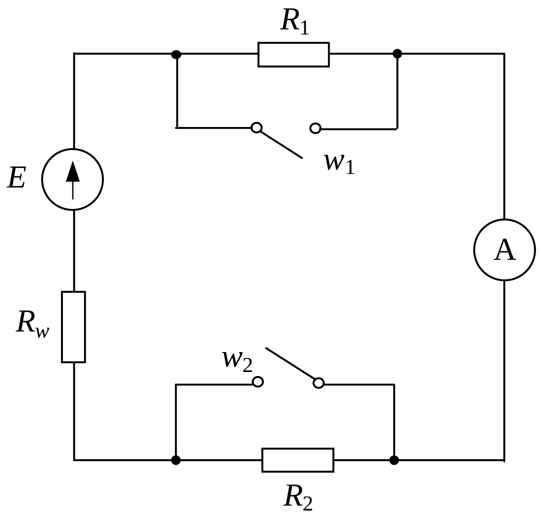
$$Q_2 = C_2 \cdot U = 6 \cdot 10^{-12} \cdot 110 = 0{,}066 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}\,.$$

Ponieważ całkowity ładunek obu układów jest taki sam, ostatecznie otrzymujemy

$$C_x = \frac{Q - Q_1}{U} = \frac{10^{-8} - 0{,}146 \cdot 10^{-8}}{110} = 77{,}6\,\mathrm{pF}$$

$$C_y = \frac{Q - Q_2}{U} = \frac{10^{-8} - 0{,}066 \cdot 10^{-8}}{110} = 84{,}9\,\mathrm{pF}.$$

Zadanie 2
W obwodzie pokazanym na rys. 2 wskazanie idealnego amperomierza przy otwartych wyłącznikach w_1 i w_2 (idealnych) wynosi $I_1 = 1{,}2\,\mathrm{A}$. Po zamknięciu w_1 amperomierz wskazał $I_2 = 3\,\mathrm{A}$. Obliczyć wskazanie amperomierza, gdy w_1 będzie otwarty a w_2 zamknięty.



Rys. 2

Odpowiedź do zadania 2:

Wariant 1

Na podstawie wskazań amperomierza (I_1 oraz I_2) otrzymujemy układ dwóch równań:

$$E = I_1(R_1 + R_2 + R_w)$$

$$E = I_2(R_2 + R_w)$$

Po elementarnych przekształceniach otrzymujemy:

$$E = \frac{I_1 I_2}{I_2 - I_1} R_1$$

$$R_w = \frac{I_1 R_1}{I_2 - I_1} - R_2$$

Gdy w_1 będzie otwarty, a w_2 zamknięty, amperomierz wskaże prąd

$$I_3 = \frac{E}{R_1 + R_w} = \frac{I_1 I_2 R_1}{I_1 R_2 + I_2(R_1 - R_2)}$$

Wariant 2

Na podstawie wskazań amperomierza (I_1 oraz I_2) otrzymujemy układ dwóch równań:

$$E = I_1(R_1 + R_2 + R_w)$$

$$E = I_2(R_2 + R_w)$$

Podstawiając dane z treści zadania, równania możemy zapisać w postaci:

$$E - 1{,}2R_w = 1{,}2(R_1 + R_2)$$
$$E - 3R_w = 3 \cdot R_2$$

Po elementarnych przekształceniach otrzymujemy:

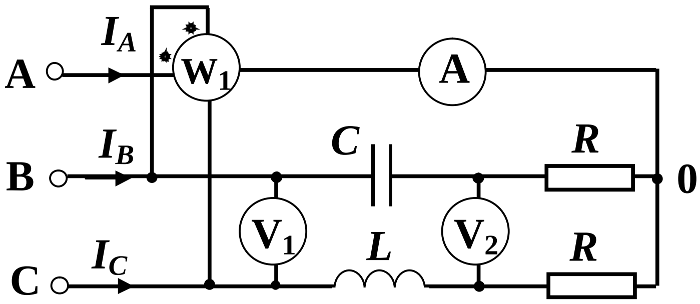
$$E = 2R_1$$
$$R_w = 0{,}67R_1 - R_2$$

Gdy w_1 będzie otwarty, a w_2 zamknięty, amperomierz wskaże prąd

$$I_3 = \frac{E}{R_1 + R_w} = \frac{2R_1}{1{,}67R_1 - R_2}$$

Zadanie 3

Zasilanie układu przedstawionego na rys.3 jest symetryczne a kolejność faz zgodna, tzn. A,B,C. Wartość skuteczna napięcia międzyprzewodowego $|U|$=400V. Rezystancja i reaktancje elementów są równe: $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 20\sqrt{3}\Omega;\quad R = 20\Omega.$ Przyrządy pomiarowe umieszczone w układzie są miernikami idealnymi, amperomierz i woltomierze mierzą wartości skuteczne.



Rys.3

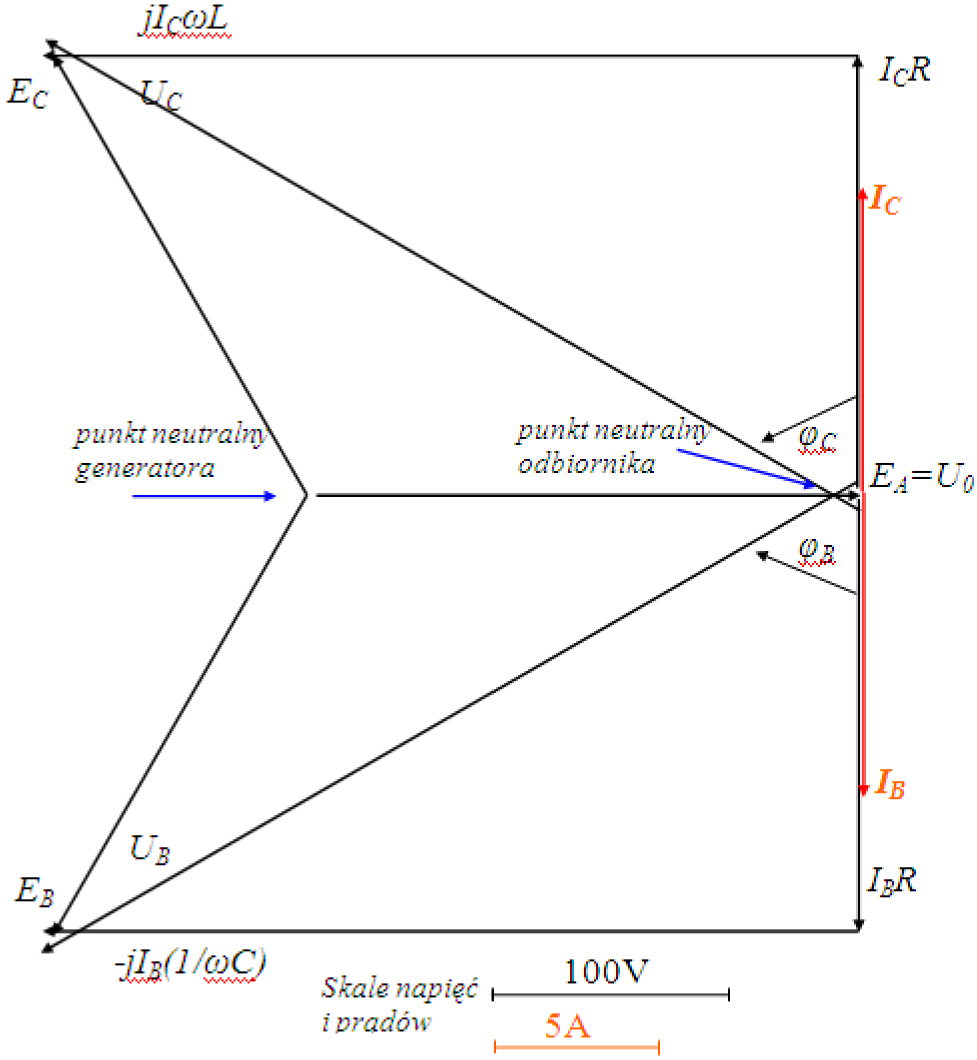
1. Narysuj wykres wskazowy napięć i prądów przedstawionego obwodu.
2. Wyznacz wskazania wszystkich przyrządów pomiarowych przedstawionego układu.

Odpowiedź do zadania 3:

1. Wykres wskazowy układu przedstawiony na rysunku poniżej, rysowany jest w następującej kolejności:
    - Symetryczna gwiazda napięć generatora E_A, E_B, E_C
    - Napięcie $U_o = E_A$ (bo faza A jest zwarta)
    - Napięcia faz B oraz C odbiornika: $U_B = E_B - U_0$; $U_C = E_C - U_0$
    - Prądy faz B oraz C odbiornika: I_B wyprzedza napięcie U_B o kąt 60° (φ_B = -60°), I_C opóźnia się o kąt 60° w stosunku do U_C (φ_C = 60°); prąd $I_A = -(I_B + I_C) = 0$

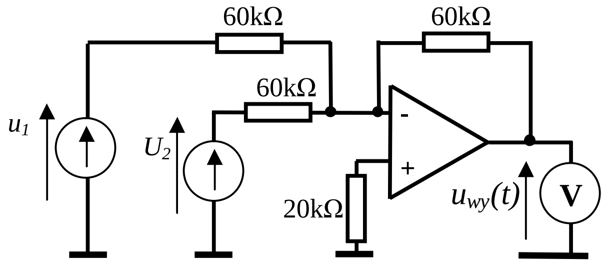
- Napięcia na elementach R, L oraz C dokonując rozkładu napięć fazowych U_B oraz U_C na napięcia na elementach R zgodne z prądem odpowiedniej fazy oraz napięcia na elementach L i C opóźnione lub odpowiednio przyspieszone względem prądu fazowego

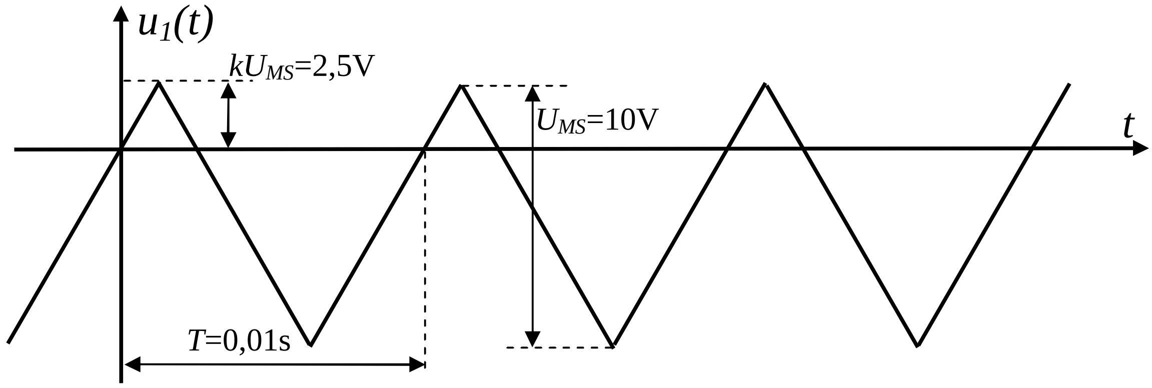
2. Wskazania przyrządów pomiarowych odczytane z wykresu wskazowego to (te same wartości otrzymać można wykonując analizę obliczeniową układu):
   - Amperomierz wskazuje 0 bo prąd fazy A jest równy 0, (prądy faz B i C są w przeciwfazie a ich wartości skuteczne są sobie równe)
   - Wskazanie watomierza jest równe 0 bo prąd jego cewki prądowej jest równy 0
   - Woltomierz V_1 wskazuje 400V; jest to wartość skuteczna napięcia międzyprzewodowego U_{BC} : U_{V1}=400V
   - Woltomierz V_2 wskazuje wartość skuteczną napięcia, które jest różnicą napięcia panującego na elemencie R w fazie B oraz na elemencie R w fazie C: U_{V2}=400V



Zadanie 4

Do jednego z wejść układu sumatora zbudowanego na wzmacniaczu operacyjnym, przedstawionego na rys. 4, dołączono źródło napięciowe generujące napięcie $u_1(t)$ o kształcie trójkąta i czasie narastania sygnału równym czasowi opadania, częstotliwości równej f=100Hz oraz wartości międzyszczytowej U_{MS} = 10V, którego maksymalna wartość dodatnia wynosi kU_{MS} , k=0,25 (rys.4).





Rys. 4

1. Jaka powinna być wartość napięcia stałego U_2 dołączonego do drugiego z wejść sumatora aby wskazanie woltomierza V mierzącego wartość średnią napięcia $u_{wy}(t)$ równe było 0 ?
2. Narysuj przebieg napięcia $u_{wy}(t)$
3. Wyznacz zależność określającą wartość napięcia U_2 w zależności od wartości współczynnika k. Jaki zakres napięć powinno zapewniać źródło napięcia U_2 aby zapewnić zerowe wskazanie woltomierz dla: $0 \geq k \geq 1$?

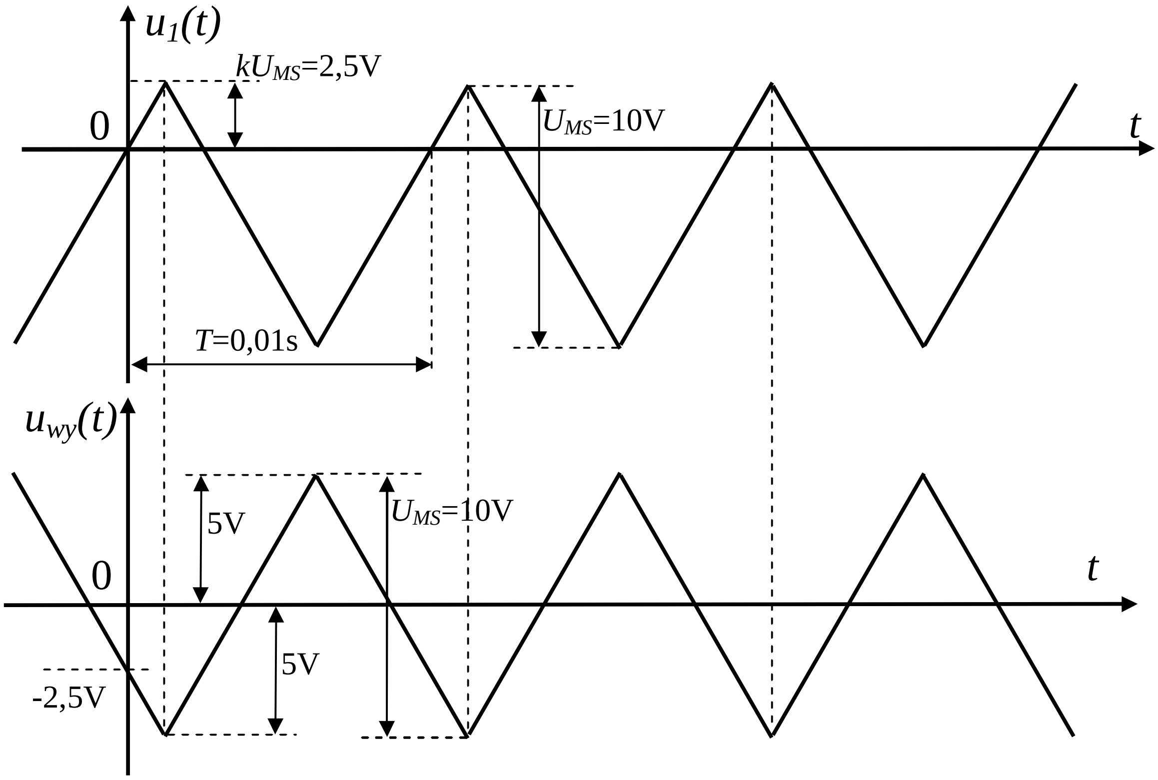
Odpowiedź do zadania 4:

1. Wartość średnia sumy napięć jest równa sumie wartości średnich tych napięć. Napięcie U_2 musi zatem kompensować wartość średnią napięcia $u_1(t)$. Napięcie $u_1(t)$ ma kształt trójkąta równoramiennego. Taki sam kształt mają jego części o dodatnich oraz ujemnych wartościach. Wartość średnia napięcia u_1 wynosi zatem:

$$U_{1SR} = 0{,}5 \cdot 2{,}5 - 0{,}5 \cdot (10 - 2{,}5) = -2{,}5\text{V}$$

Oba wejściowe napięcia są sumowane z jednakowym współczynnikiem wzmocnienia. Aby wartość średnia napięcia wyjściowego wynosiła 0 napięcie U_2 musi mieć wartość 2,5V.

2. Przebieg napięcia $u_{wy}(t)$ dla k=0,25 oraz U_2=2,5V przedstawia rys. 4.1.



Rys. 4.1

3. Wartość średnia napięcia $u_1(t)$ wynosi:

$$U_{1SR} = 0{,}5kU_{MS} - 0{,}5(1-k)U_{MS} = (k-0{,}5)U_{MS} \qquad \text{dla } 0 \geq k \geq 1$$

Napięcie U_2 musi mieć wartość równą:

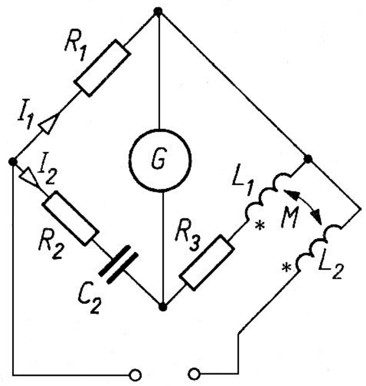
$$U_2 = -U_{1SR} = (0{,}5-k)U_{MS} \qquad \text{dla } 0 \geq k \geq 1$$

Wynika z powyższego, że dla przyjętego zakresu zmian k napięcie U_2 powinno osiągać wartości z zakresu:

$$5\text{V} \leq U_2 \leq -5\text{V} \qquad \text{dla } 0 \geq k \geq 1$$

Zadanie 5

Na rys.1. przedstawiono schemat mostka za pomocą, którego dokonano pomiaru indukcyjności własnej oraz wzajemnej M. Mostek zastał zrównoważony dla wartości R_1 =1kΩ, R_2 = 600Ω, R_3 = 200Ω, C_2 = 125nF. Wyznaczyć wartość indukcyjności własnej L_1 oraz wzajemnej M.



Rys. 5

Odpowiedź do zadania 5:

W stanie równowagi mostka obowiązują zależności:

$$I_1 R_1 = I_2 \left(R_2 - j\frac{1}{\omega C_2} \right)$$

$$I_2 \left(R_3 + j\omega L_1 \right) - \left(I_1 + I_2 \right) j\omega M = 0$$

Po uporządkowaniu i podzieleniu stronami równań aby pozbyć się prądów uzyskujemy zależność:

$$R_1 \left[R_3 + j\omega \left(L_1 - M \right) \right] = \left(R_2 - j\frac{1}{\omega C_2} \right) j\omega M$$

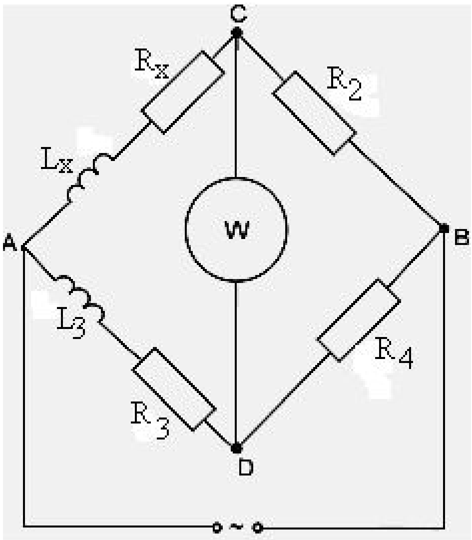
Po przyrównaniu do siebie oddzielnie części rzeczywistych i urojonych otrzymamy zależności:

$$R_1 R_3 = \frac{M}{C_2} \text{ oraz } \omega R_1 \left(L_1 - M \right) = \omega M R_2$$

Ostatecznie $M = C_2 R_1 R_3 = 125 \cdot 10^{-9} \cdot 1000 \cdot 200 = 25\text{mH}$

oraz $L_1 = M\frac{R_1 + R_2}{R_1} = 0{,}025\frac{1000 + 600}{1000} = 40mH$

Zadanie 6



Rys. 6.

Przedstawiony na rysunku mostek Maxwella został doprowadzony do równowagi. Dane elementów regulacyjnych są następujące: R_2 = 450Ω, R_3 = 100Ω, R_4 =1k Ω, L_3 = 100mH. Wyznaczyć wartości R_1 i L_1.

Odpowiedź do zadania 6:

Równania równowagi mostka Maxwella są następujące;

$$I_1(R_x + j\omega L_x) = I_2(R_3 + j\omega L_3);$$
$$I_1 R_2 = I_2 R_4$$

Po podzieleniu tych równań stronami aby pozbyć się prądów otrzymujemy jedno równanie równowagi

$$(R_x + j\omega L_x)R_4 = (R_3 + j\omega L_3)R_2$$

Po przyrównanie części rzeczywistych i urojonych otrzymujemy następujące wzory na mierzone wielkości:

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

$$L_x = L_3 \frac{R_2}{R_4}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

*R*x = 45 Ω i *L*x = 45mH

Rozwiązanie alternatywne

Aby zrównoważyć mostek prądu przemiennego należy spełnić dwa następujące warunki:

warunek modułu - $|Z_x||Z_4| = |Z_2||Z_3|$

warunek fazy - $\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$

Z równań wynika, że dla uzyskania równowagi iloczyny modułów i sumy argumentów przeciwległych gałęzi muszą być sobie równe.

Dla mostka Maxwella warunki te wyglądają następująco:

$$R_x\sqrt{1+\left(\frac{\omega L_x}{R_x}\right)^2}R_4 = R_3\sqrt{1+\left(\frac{\omega L_3}{R_3}\right)^2}R_2$$

$$\varphi_x = \varphi_3$$

Skoro $\varphi_x = \varphi_3$ to również $tg\varphi_x = tg\varphi_3$ czyli

$$\frac{\omega L_x}{R_x} = \frac{\omega L_3}{R_3}$$

Z równania tego uzyskujemy wzór na mierzoną indukcyjność własną

$$L_x = L_3\frac{R_x}{R_3}$$

Ponieważ nieznana jest nam wartość R_x więc wyznaczamy ją z warunku modułu

$$R_x = R_2\frac{R_3}{R_4}$$

Po podstawieniu do równania powyższego otrzymujemy ostateczny wzór

$$L_x = L_3\frac{R_2}{R_4}$$

Po podstawieniu danych uzyskujemy

*R*x = 45 Ω i *L*x = 45mH