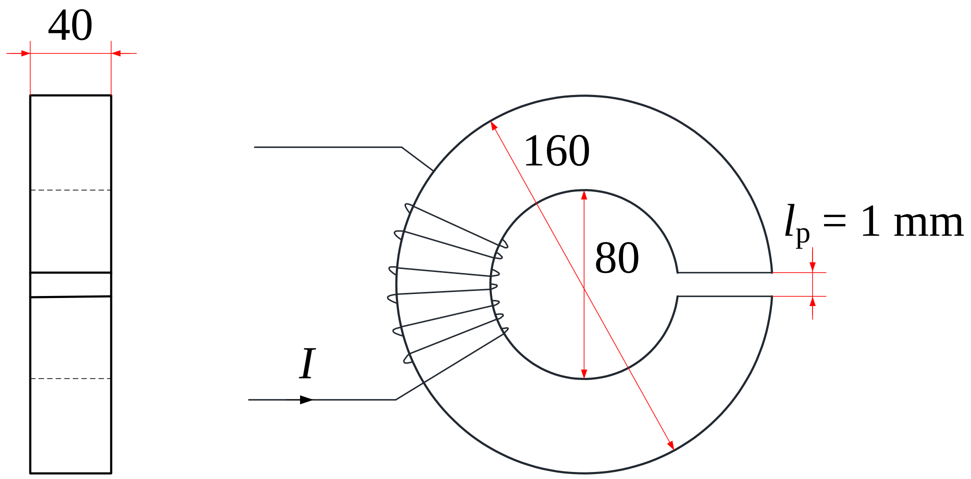
„EUROELEKTRA”
Ogólnopolska Olimpiada Wiedzy Elektrycznej i Energetycznej
Rok szkolny 2022/2023

Odpowiedzi do zadań dla grupy elektrycznej na zawody III stopnia

Zadanie 1

Cewka obwodu magnetycznego ma 2000 zwojów. Prąd płynący w cewce I = 1,10 A. Rdzeń obwodu wykonano ze staliwa. Długość szczeliny l_p = 1 mm. Pozostałe wymiary podano na rysunku w mm. Należy oblicz wartość indukcji magnetycznej w szczelinie. Natężenie pola w rdzeniu staliwnym dla B_{FE_1} = 1,00 T wynosi $H_{\_1}$ = 810 A/m, B_{FE_2} = 1,20 T; $H_{\_2}$ = 1270A/m, B_{FE_3} = 1,25 T; $H_{\_3}$ = 1440A/m; B_{FE_4} = 1,30 T, $H_{\_4}$ = 1680A/m; B_{FE_5} = 1,4T; $H_{\_5}$ = 2300A/m; B_{FE_6} = 1,5T; $H_{\_6}$ = 3300A/m.



Rysunek 2. Obwód magnetyczny

Rozwiązanie:

W zadaniu połączono szeregowo dwa elementy: liniowy (szczelina) i nieliniowy (rdzeń staliwny). Zadanie można obliczyć metodą wykreślną i metodą kolejnych przybliżeń.

Z prawa przepływu: $I{\cdot}Z = H_p{\cdot}l_p + H_{FE}{\cdot}l_{FE}$

Mając wymiary rdzenia: l_p=0,001 m; $l_{FE} = \frac{0{,}16+0{,}08}{2}\cdot\pi = 0{,}3768$ m

Pierwsza iteracja

Natężenie pola dla staliwa wynosi:

$$B_{FE\_1} = 1{,}00\ \mathrm{T};\ H_{\_1} = 810\ \mathrm{A/m}$$

Przyjmijmy np. $B_{p\_1} = B_{FE\_1}$ = 1,00 T.

Natężenie pola w szczelinie obliczamy według wzoru:

$$H_{p\_1} = \frac{B_{p\_1}}{\mu_0} = \frac{1{,}00}{1{,}256\cdot10^{-6}} = 796000\ \mathrm{A/m}.$$

Obliczamy wartość prądu płynącego w cewce:

$$I_1 = \frac{H_{\mathrm{FE\_1}} l_{\mathrm{FE}} + H_{\mathrm{p\_1}} \cdot l_{\mathrm{p}}}{z} = \frac{810 \cdot 0{,}3768 + 796000 \cdot 0.001}{2000} = 0{,}55 \text{ A}.$$

Wartość prądu I_1= 0,55 A jest mniejsza od danej (1,10 A).

Druga iteracja
Obieramy, zatem indukcję większą np. 1,20 T. itd.

$$H_p = \frac{B_p}{\mu_0} = \frac{1{,}20}{1{,}256 \cdot 10^{-6}} = 995414 \text{ A/m}.$$

Prąd w cewce:

$$I_2 = \frac{1270 \cdot 0{,}3768 + 995414 \cdot 0{,}001}{2000} = \frac{1473}{2000} = 0{,}736 \text{ A}$$

Wartość prądu I_1= 0,736 A jest mniejsza od danej (1,10 A).

Trzecia iteracja
Obieramy, zatem indukcję większą np. 1,25 T. itd.

$$H_p = \frac{B_p}{\mu_0} = \frac{1{,}25}{1{,}256 \cdot 10^{-6}} = 995222 \text{ A/m}.$$

Prąd w cewce:

$$I_3 = \frac{1440 \cdot 0{,}3768 + 995222 \cdot 0{,}001}{2000} = \frac{1538}{2000} = 0{,}769 \text{ A}$$

Wartość prądu I_3= 0,769 A jest mniejsza od danej (1,10 A).

Czwarta iteracja
Obieramy, zatem indukcję większą np. 1,30 T. itd.

$$H_p = \frac{B_p}{\mu_0} = \frac{1{,}3}{1{,}256 \cdot 10^{-6}} = 1035031{,}8 \text{ A/m}.$$

Prąd w cewce:

$$I_4 = \frac{1680 \cdot 0{,}3768 + 1035031{,}8 \cdot 0{,}001}{2000} = \frac{1668}{2000} = 0{,}834 \text{ A}.$$

Wartość prądu I_3= 0,769A jest mniejsza od danej (1,10 A).

Piąta iteracja
Obieramy, zatem indukcję większą np. 1,4 T. itd.

$$H_p = \frac{B_p}{\mu_0} = \frac{1{,}4}{1{,}256 \cdot 10^{-6}} = 1114649 \text{ A/m}.$$

Prąd w cewce:

$$I_5 = \frac{2300 \cdot 0{,}3768 + 1114649 \cdot 0{,}001}{2000} = \frac{1980}{2000} = 0{,}99 \text{ A}.$$

Wartość prądu I_5= 0,99A jest mniejsza od danej (1,10 A).

Szósta iteracja
Obieramy, zatem indukcję większą np. 1,5 T. itd.

$$H_p = \frac{B_p}{\mu_0} = \frac{1{,}5}{1{,}256 \cdot 10^{-6}} = 1193662 \text{ A/m}.$$

Prąd w cewce:

$$I_6 = \frac{3300 \cdot 0{,}3768 + 1193662 \cdot 0{,}001}{2000} = 1{,}22 \text{ A}.$$

Wartość prądu I_6 = 1,22A jest większa od danej (1,10 A).

Analizując uzyskane wyniki w poszczególnych iteracjach można sądzić, że indukcja magnetyczna w szczelinie będzie wynosić pomiędzy 1,4 T a 1,5 T. W kolejnej iteracji można założyć aproksymację linią pomiędzy dwoma punktami $B_{\mathrm{FE\_5}}$ = 1,4T; $H_{\_5}$ = 2300A/m; $B_{\mathrm{FE\_6}}$ = 1,5T;

$H_{\_6}$ = 3300A/m. Zastosowanie takiej aproksymacji umożliwi znalezienie wartości natężenia pola magnetycznego dla indukcji magnetycznych z przedziału 1,4 T a 1,5 T.

W tym celu można wykorzystać równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

$$H = \frac{H_{\_6} - H_{\_5}}{B_{\mathrm{FE\_6}} - B_{\mathrm{FE\_5}}} \cdot B + \left(H_{\_5} - \frac{H_{\_6} - H_{\_5}}{B_{\mathrm{FE\_6}} - B_{\mathrm{FE\_5}}} \cdot B_{\mathrm{FE\_5}}\right)$$

$$H = \frac{3300 - 2300}{1,5 - 1,4} \cdot B + \left(2300 - \frac{3300 - 2300}{1,5 - 1,4} \cdot 1,4\right)$$

Funkcja aproksymacja

$$H = 10000 \cdot B - 11700$$

Siódma iteracja

Przy wykorzystaniu funkcji aproksymującej można wyznaczyć wartość natężenia pola magnetycznego dal kolejnych wartości indukcji magnetycznej z przedziału 1,4 T a 1,5 T.

Obieramy, zatem indukcję większą np. 1,45 T.

$$H_7 = 10000 \cdot 1,45 - 11700 = 2800 \text{ A/m}$$

$$H_p = \frac{B_p}{\mu_0} = \frac{1,45}{1,256 \cdot 10^{-6}} = 1153873 \text{ A/m.}$$

Prąd w cewce:

$$I_7 = \frac{2800 \cdot 0,3768 + 1153873 \cdot 0,001}{2000} = \frac{2209,45}{2000} = 1,10 \text{ A.}$$

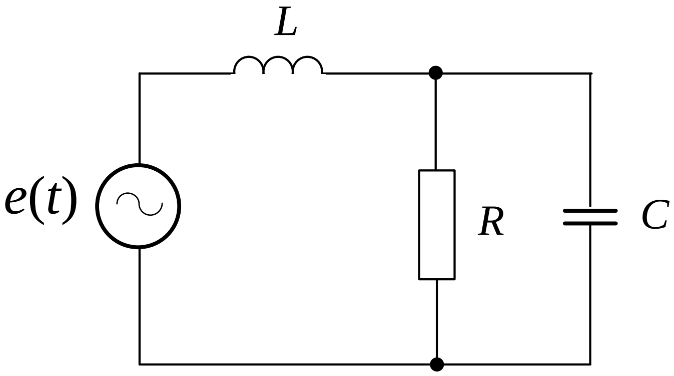
Wartość prądu I_7= 0,99A jest mniejsza od danej (1,10 A).

Odpowiedź:

Dla prądu płynącego w cewce I = 1,10 A wartość indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej wyniesie w przybliżeniu 1,45 T.

Zadanie 2

Dla obwodu elektrycznego przedstawionego na rysunku należy dobrać pojemność kondensatora tak, aby moc bierna źródła napięcia sinusoidalnego była równa zeru. Dane: ω = 200 1/s, R = 100 Ω, L = 0,200 H



Rysunek 2. Obwód elektryczny

Rozwiązanie

W pierwszej kolejności można wyznaczyć impedancję wypadkową gałęzi równoległej RC

$$\underline{Z}_{RC} = \frac{R(-j\frac{1}{\omega C})}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{-jR}{R\omega C - j} = \frac{-jR(R\omega C + j)}{R^2\omega^2C^2 + 1} = \frac{R}{R^2\omega^2C^2 + 1} - j\frac{R^2\omega C}{R^2\omega^2C^2 + 1}$$

Następie można zapisać zależność na impedancja wypadkowa obwodu elektrycznego przedstawionego na rysunku 3

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{RC} + \mathrm{j} \cdot \omega L = \frac{R}{R^2\omega^2C^2 + 1} + j \cdot \left(\omega L - \frac{R^2\omega C}{R^2\omega^2C^2 + 1}\right)$$

Moc bierna źródła napięcia sinusoidalnego będzie równa zeru w przypadku, gdy obwodzie zajdzie rezonans. Warunek ten wystąpi w przypadku, gdy reaktancja wypadkowa obwodu elektrycznego przedstawionego na rysunku 3 jest równa zeru

Warunek rezonansu jest następujący

$$\mathrm{Im}(\underline{Z}) = 0$$

$$\omega L - \frac{R^2\omega C}{R^2\omega^2C^2 + 1} = 0$$

W następnym kroku dokonywanych jest szereg przekształceń

$$\omega L = \frac{R^2\omega C}{R^2\omega^2C^2 + 1}$$

$$(R^2\omega^2C^2 + 1)L = R^2C$$

$$\omega^2R^2C^2L - R^2C + L = 0$$

Kolejnym kroku rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\Delta = (R^2)^2 - 4 \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot L^2$$

$$\Delta = (-100^2)^2 - 4 \cdot 200^2 \cdot 100^2 \cdot 0{,}200^2 = 36000000$$

Δ jest dodatnia, zetem mamy dwa rozwiązania

$$C_1 = \frac{-(-R^2) + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot L} = \frac{-(-100^2) + \sqrt{36000000}}{2 \cdot 200^2 \cdot 100^2 \cdot 0{,}200}$$

$$C_1 = \frac{16000}{160000000} = 100\ \mu\text{F}$$

$$C_2 = \frac{-(-R^2) - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot L} = \frac{-(-100^2) - \sqrt{36000000}}{2 \cdot 200^2 \cdot 100^2 \cdot 0{,}200}$$

$$C_2 = \frac{4000}{160000000} = 25\ \mu\text{F}$$

Odpowiedź:

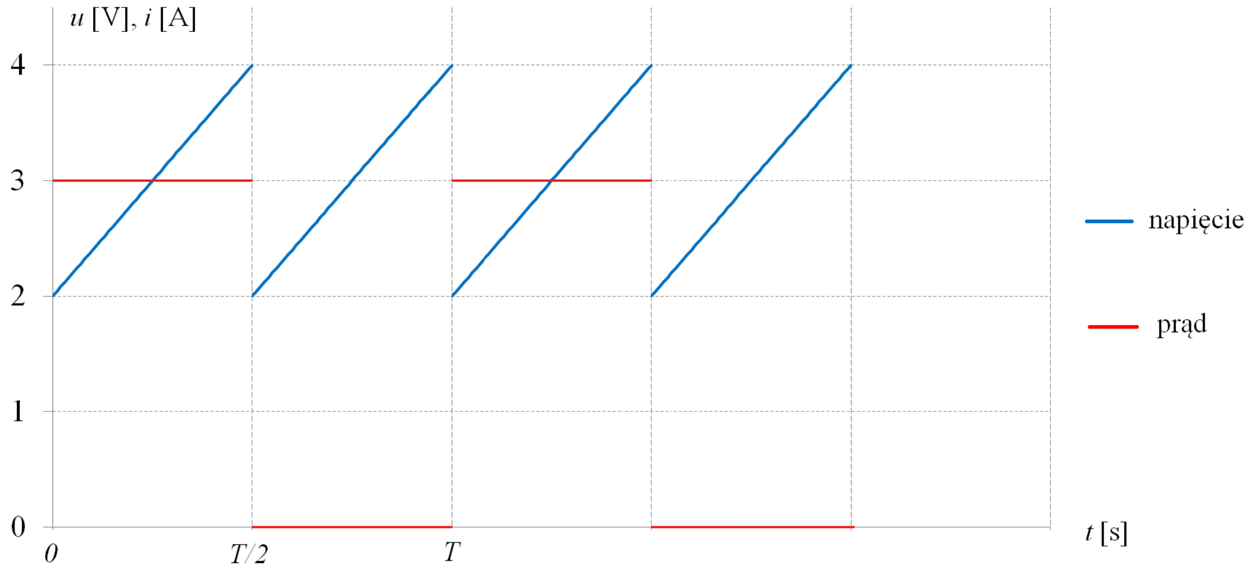
Moc bierna źródła napięcia sinusoidalnego będzie równa zeru w przypadku, gdy pojemność kondensatora będzie wynosiła 25 μF albo 100 μF.

Zadanie 3

Do zacisków odbiornika elektrycznego, który zasilany jest z zasilacza programowalnego został podłączony oscyloskop dwukanałowy z sondą napięciową i prądową. W wyniku pomiaru został zrejestrowany przebieg czasowy napięcia (kolor niebieski) i prądu (kolor czerwony), które zostały przedstawione na wykresie poniżej. Na podstawie przebiegu należy obliczyć moc czynną i pozorną pobieraną przez odbiornik.

Przebieg czasowy napięcia można zapisać zależnością

$$u(t) = \begin{cases} \left(\frac{4}{T} \cdot t + 2\right) & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \left[\frac{4}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right) + 2\right] & \frac{T}{2} < t \le T \end{cases}$$



Rysunek 3. Przebieg czasowy napięcia i prądu

Rozwiązanie

W pierwszej kolejności należy określić na podstawie przebieg prądu odbiornika opis matematyczny

$$i(t) = \begin{cases} 3 & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t \le T \end{cases}$$

W dalszej kolejności można wyznaczyć wartość skuteczna napięcia z zależności

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{4}{T} \cdot t + 2\right)^2 \ dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} \left[\frac{4}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right) + 2\right]^2 dt\right)}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{16}{T^2} \cdot t^2 + \frac{16}{T} \cdot t + 4\right) \ dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} \left(\frac{4}{T} \cdot t\right)^2 \ dt\right)}$$

$$U_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(\frac{16}{T^2}\cdot t^2+\frac{16}{T}\cdot t+4\right)dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}\frac{16}{T^2}\cdot t^2\ \ dt\right)}$$

$$U_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\left(\frac{16}{T^2}\cdot\frac{1}{3}t^3+\frac{16}{T}\cdot\frac{1}{2}t^2+4\cdot t\right)\Bigg|_{0}^{T/2}+\frac{16}{T^2}\cdot\frac{1}{3}t^3\Bigg|_{T/2}^{T}\right)}$$

$$U_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{2}{3}T+2T+2T+\frac{16}{3}T-\frac{2}{3}T\right)}=\sqrt{\frac{28}{3}}=3{,}055\text{ V}$$

W następnym korku można wyznaczyć wartość skuteczna natężenie prądu z zależności

$$I_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}i^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_{0}^{\frac{T}{2}}3^2\ \ dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}0^2\ dt\right)}$$

$$I_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}i^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\left(9\cdot t|_{0}^{T/2}+0\right)}=\sqrt{\frac{1}{T}9\frac{T}{2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}=2{,}121\text{ A}$$

Moc pozorna pobieraną przez odbiornik można wyznaczyć z zależności

$$S=U_{RMS}\cdot I_{RMS}=3{,}055\cdot 2{,}121=6{,}480\text{ VA}$$

Moc czynną pobieraną przez odbiornik można wyznaczyć z zależności

$$P=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}u(t)\cdot i\,(t)\mathrm{d}t$$

$$P=\frac{1}{T}\left(\int_{0}^{T/2}\left(\frac{4}{T}\cdot t+2\right)\cdot 3\,\mathrm{d}t+\int_{T/2}^{T}\left(\frac{4}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)+2\right)\cdot 0\,\mathrm{d}t\right)$$

$$P=\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2}\left(\frac{12}{T}\cdot t+6\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\left(\frac{12}{T}\cdot\frac{1}{2}t^2\Bigg|_{0}^{T/2}+6\cdot t|_{0}^{T/2}\right)$$

$$P=\frac{1}{T}\left(\frac{12}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{T^2}{4}+6\cdot\frac{T}{2}\right)=\frac{12}{8}+3=1{,}5+3$$

$$P=4{,}50\text{ W}$$

Odpowiedź:

Moc czynna pobierana przez odbiornik wyniesie 4,5 W natomiast moc pozorna pobierana przez odbiornik wyniesie 6,5 VA.

Zadanie 4

Napięcie odkształcone o wartości skutecznej U_{eff} = 100 V i częstotliwości 50,0 Hz zasila obwód złożony z szeregowo połączonego rezystora o rezystancji R = 2,00 Ω i kondensatora o pojemności C = 200 μF. Napięcie zasilające zawiera pierwszą i piątą harmoniczną, przy czym wartość skuteczna piątej harmonicznej będzie wynosiła $U_5 = 0{,}3 \cdot U_1$, przy czym U_1 – wartość skuteczna pierwszej harmonicznej. Oblicz wartość skuteczną prądu odkształconego oraz wartość mocy czynnej pobieranej przez obwód.

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość reaktancji pojemnościowej dla pierwszej i piątej harmonicznej.

$$X_{Ck} = \frac{1}{k\omega_1 C} \quad X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{314 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 15{,}915\ \Omega$$

$$X_{C5} = \frac{1}{5\omega_1 C} = \frac{1}{5 \cdot 314 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 3{,}1831\ \Omega;$$

Gdy występuje pierwsza i piąta harmoniczna napięcia, wówczas U_{eff}:

$$U_{eff} = \sqrt{U_1^2 + U_5^2}\ :$$

Stąd:

$$100 = \sqrt{U_1^2 + (0{,}3U_1)^2}$$

$$U_1 = 95{,}783\ \text{V}$$

$$U_5 = 0{,}3 \cdot U_1 = 0{,}3 \cdot 95{,}783 = 28{,}735\ \text{V}$$

Następnie wykorzystując wzory:

$$Z_k = \sqrt{R^2 + (k\omega_1 L - \frac{1}{k\omega_1 C})^2};\ I_k = \frac{U_k}{Z_k};$$

Obliczamy:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{95{,}783}{\sqrt{2{,}00^2 + 15{,}915^2}} = 5{,}9712\ \text{A};$$

$$I_5 = \frac{U_5}{Z_5} = \frac{28{,}357}{\sqrt{2{,}00^2 + 3{,}1831^2}} = 7{,}6437\ \text{A};$$

Obliczamy wartość skuteczną prądu odkształconego:

$$I_{eff} = \sqrt{I_1^2 + I_5^2} = \sqrt{5{,}9712^2 + 7{,}6437^2} = 9{,}6996\ \text{A};$$

Moc czynna wynosi:

$$P = RI_{eff}^2 = 2{,}00 \cdot 9{,}6996^2 = 188{,}16\ \text{W}$$

Odpowiedź:

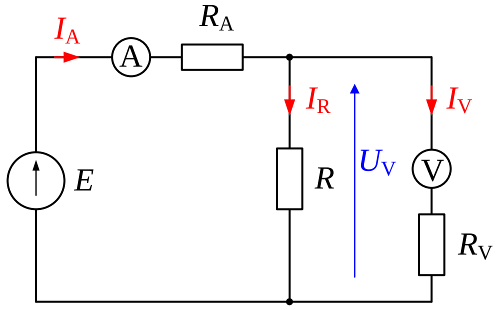
Wartość skuteczna prądu odkształconego płynącego w analizowanym obwodzie wyniesie 9,7 A natomiast wartość mocy czynnej pobieranej przez obwód wyniesie 188 W.

Zadanie 5

Pomiar rezystancji metodą techniczną możliwy jest w jednym z dwóch układów: a) układzie poprawnie mierzonego napięcia lub b) układzie poprawnie mierzonego prądu. Przy jakiej rezystancji rzeczywistej R zmierzona rezystancja pomiarowa R_p, rozumiana jako stosunek napięcia (wskazania woltomierza) do natężenia prądu (wskazanie amperomierza), będzie taka sama w obu układach pomiarowych? Uwzględnić, że przy pomiarze w obu układach amperomierz miał taką samą rezystancję cewki pomiarowej równą $R_A = 2{,}00\ \Omega$, podobnie woltomierz $R_V = 100\ \Omega$. Dla uproszczenia należy przyjąć, że wskazania mierników nie są obciążone uchybem.

Rozwiązanie:

a) Pomiar rezystancji metodą techniczną w układzie poprawnie mierzonego napięcia przedstawiono na rysunku 5.1.

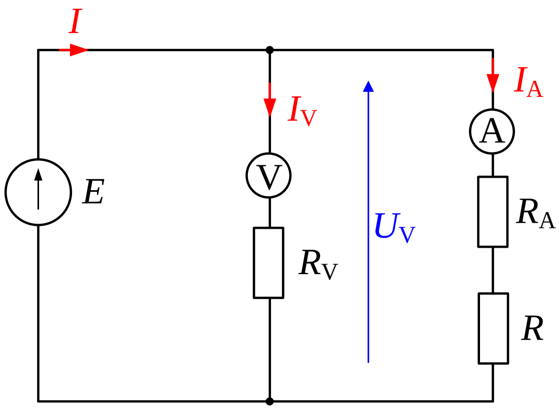


Rysunek 5.1. Układ z poprawnie mierzonym napięciem

Analizując obwód elektryczny i uwzględniając rzeczywiste przyrządy pomiarowe i dokonując przekształceń można zapisać zależność na rezystancję pomiarową dla układu z poprawnie mierzonym napięciem

$$R_p = \frac{U_V}{I_A} = \frac{I_A \cdot \dfrac{R \cdot R_V}{R + R_V}}{I_A} = \frac{R \cdot R_V}{R + R_V}$$

b) Pomiar rezystancji metodą techniczną w układzie poprawnie mierzonego prądu przedstawiono na rysunku 5.2.



Rysunek 5.2. Układ z poprawnie mierzonym prądem

Analizując obwód elektryczny i uwzględniając rzeczywiste przyrządy pomiarowe i dokonując przekształceń można zapisać zależność na rezystancję pomiarową dla układu z poprawnie mierzonym prądem

$$R_p = \frac{U_V}{I_A} = \frac{I_A \cdot (R + R_A)}{I_A} = R + R_A$$

W celu określenia przy jakiej rezystancji rzeczywistej R zmierzona rezystancja pomiarowa R_p, rozumiana jako stosunek napięcia (wskazania woltomierza) do natężenia prądu (wskazanie amperomierza), będzie taka sama w obu układach pomiarowych należy je ze sobą porównać.

$$\frac{R \cdot R_\mathrm{V}}{R + R_\mathrm{V}} = R + R_\mathrm{A}$$

Dokonując przekształceń matematycznych otrzymujemy równanie kwadratowe względem niewiadomej R

$$R^2 + R_\mathrm{A} \cdot R + R_\mathrm{A} \cdot R_\mathrm{V} = 0$$

Podstawiając dane otrzymujemy

$$R^2 + 2{,}00 \cdot R + 2{,}00 \cdot 100 = 0$$

W kolejnym kroku rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\Delta = {R_\mathrm{A}}^2 - 4 \cdot 1{,}0 \cdot R_\mathrm{A} \cdot R_\mathrm{V} = 2{,}00^2 - 4 \cdot 2{,}00 \cdot 100$$

$$\Delta = -796$$

Jak widać z powyższego rozwiązania $\Delta<0$, więc nie ma takiej wartości rezystancji R, aby zmierzona rezystancja pomiarowa R_p byłaby taka sama w obu układach pomiarowych.

Odpowiedź:

Nie ma takiej wartości rezystancji R, aby zmierzona rezystancja pomiarowa R_p byłaby taka sama w obu układach pomiarowych.

Opracowali:	***Sprawdził:***	***Zatwierdził:***
dr hab. inż. Piotr Jankowski, prof. UMG dr inż. Tomasz Nowak	dr inż. Zbigniew Kłosowski	Przewodniczący Rady Naukowej Olimpiady dr hab. inż. Sławomir Cieślik, prof. PBŚ