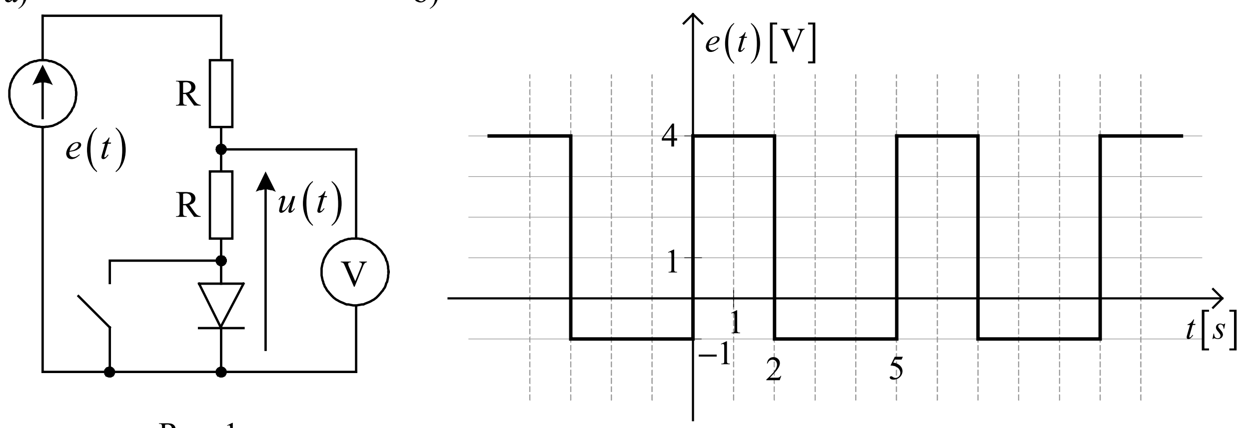
„EUROELEKTRA”
Ogólnopolska Olimpiada Wiedzy Elektrycznej i Elektronicznej
Rok szkolny 2009/2010
Rozwiązania zadań dla grupy elektrycznej na zawody III stopnia (finał)

Zadanie nr 1 (autor dr inż. Radosław Kłosiński)

Zakładając, że elementy obwodu przedstawionego na rys. 1a są idealne, obliczyć wartość średnią napięcia wskazywaną przez woltomierz magnetoelektryczny, przy otwartym oraz przy zamkniętym wyłączniku. Przebieg czasowy siły elektromotorycznej źródła przedstawia rys. 1b.

a) b)



Rys. 1

Rozwiązanie:

1) Wyłącznik zamknięty (dioda zwarta)

W tym przypadku układ dwóch rezystorów stanowi dzielnik napięcia, napięcie $u(t)$ mierzone przez woltomierz stanowi połowę napięcia źródła. Wskazanie woltomierza, czyli wartość średnia dana jest wzorem:

$$U_{Vz} = U_{sr} = \tfrac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$$

W rozpatrywanym przypadku:

$$U_{\mathrm{Vz}} = \tfrac{1}{T}\int_0^T \tfrac{1}{2}e(t)\,dt = \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\int_0^2 4dt + \int_2^5 (-1)\,dt\right) = \tfrac{1}{10}\left(4\int_0^2 dt - \int_2^5 dt\right)$$
$$= \tfrac{1}{10}\big(4\cdot(2-0) - 1\cdot(5-2)\big) = 0,5[\mathrm{V}]$$

2) Wyłącznik otwarty

W tym przypadku, przy polaryzacji diody w kierunku zaporowym, czyli gdy napięcie źródła przyjmuje ujemne wartości, całe napięcie źródła odkłada się na diodzie. Przy polaryzacji diody w kierunku przewodzenia napięcie doprowadzone do woltomierza jest równe połowie napięcia źródła zasilania. Wskazanie woltomierza określa wyrażenie:

$$U_{\mathrm{Vz}} = \tfrac{1}{5}\left(\int_0^2 \tfrac{1}{2}\cdot 4dt + \int_2^5 (-1)\,dt\right) = \tfrac{1}{5}\left(2\int_0^2 dt - \int_2^5 dt\right)$$
$$= \tfrac{1}{5}\big(2\cdot(2-0) - 1\cdot(5-2)\big) = 0,2[\mathrm{V}]$$

Zadanie można rozwiązać bez całkowania na zasadzie zrozumienia pojęcia wartości średniej i intuicyjnego sumowania powierzchni ograniczonej wykresem.

Zadanie nr 2 (autor dr inż. Robert Smoleński)

Zasobnik energii elektrycznej składa się z $n = 20$ szeregowo połączonych, jednakowych superkondensatorów (typu *PC2700*) o pojemności C_S = 2700 F. Zasobnik ten naładowano do napięcia nominalnego U_{NZ} = 50 V. Wyznaczyć pojemność zastępczą C_Z zasobnika oraz energię E_Z zgromadzoną w zasobniku. Wyznaczyć czas T_R w jakim nastąpi rozładowanie zasobnika do połowy napięcia nominalnego, w przypadku obciążania go stałą mocą P_O = 0,5 kW.

Rozwiązanie:

$$C_Z = \frac{C_S}{n} = \frac{2700}{20} = 135 \text{ F} ,$$

gdzie: C_S – pojemność jednego superkondensatora, n – liczba superkondensatorów w zasobniku

$$E_Z = \frac{C_Z \cdot U_{NZ}^2}{2} = \frac{135 \cdot 2500}{2} \text{ J} = 168750 \text{ J}$$

$$T_R = \frac{C_Z \cdot (U_{NZ}^2 - U_{KZ}^2)}{2 \cdot P_O} = \frac{135(2500 - 625)}{1000} = 253{,}13 \text{ s}$$

gdzie U_{KZ} – jest wartością końcową napięcia w procesie rozładowania.

Zadanie nr 3 (autor dr inż. Robert Smoleński)

Obcowzbudny silnik elektryczny prądu stałego ma następujące dane: P_n = 9,5 kW; U_n = 200 V; I_n = 50 A; n_n = 3000 obr/min; R_T = 0,2 Ω. Wyznaczyć naturalną charakterystykę mechaniczną silnika. Wyznaczyć także prędkość obrotową przy momencie obciążenia na wale wynoszącym 25 Nm, strumieniu wzbudzenia wynoszącym 50% wartości znamionowej oraz rezystancji dodatkowej w obwodzie twornika R_d = 0,8 Ω.

Rozwiązanie:

$$C_e \cdot \phi_n = \frac{U_n - I_n \cdot R_T}{\omega_n} = \frac{200 - 10}{314} = 0{,}605 \text{ V} \cdot \text{s}$$

gdzie: $\omega_n = n_n \cdot \frac{2\pi}{60} = 314 \ \frac{1}{\text{s}}$

Charakterystyka mechaniczna silnika jest liniowa. Wyznaczamy dwa punkty:

dla $M = 0$:

$$\omega_0 = \frac{U_n}{C_e \cdot \phi_n} = \frac{200}{0{,}605} = 330{,}5 \ \frac{1}{\text{s}}$$

dla $M = M_n$:

$$M_n = \frac{P_n}{\omega_n} = \frac{9500}{314} = 30{,}25 \text{ N} \cdot \text{m}; \quad \omega_n = 314 \frac{1}{\text{s}}$$

Zatem prędkość przy $C_e \cdot \phi = 0{,}5 \cdot C_e \cdot \phi_n$, M = 25 Nm oraz R_d = 0,8 Ω :

$$I_T = \frac{M}{C_e \cdot \phi}$$

$$\omega = \frac{U_n}{C_e \cdot \phi} - I_T \cdot \frac{R_T}{C_e \cdot \phi}$$

$$\omega = \frac{U_n}{0{,}5 \cdot C_e \cdot \phi_n} - M \cdot \frac{R_T + R_d}{(0{,}5 \cdot C_e \cdot \phi_n)^2} = 661 - 25 \cdot \frac{1}{0{,}0915} = 661 - 273 = 388 \ \frac{1}{\text{s}}$$

$$n = \omega \cdot \frac{60}{2\pi} = 3705\ \frac{\text{obr}}{\text{min}}$$

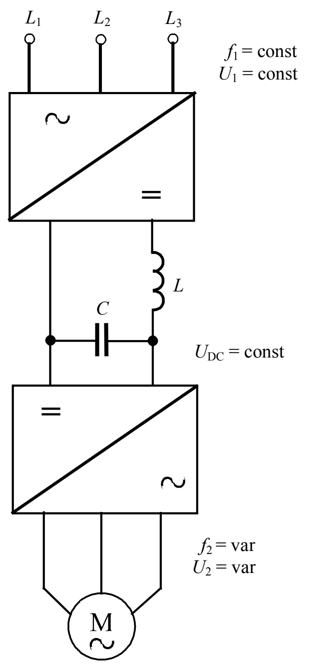
Zadanie nr 4 (autor dr inż. Mirosław Miszewski)

Na rys. 2 pokazano schemat blokowy regulowanego napędu asynchronicznego, wykorzystujący falownik napięcia z modulacją szerokości impulsu do zasilania silnika indukcyjnego o danych: $U_N = 320$ V; $P_N = 50$ kW; $f_N = 50$ Hz; $n_N = 1470$ obr/min; $M_{maxN}/M_N = 2{,}24$. Napęd przeznaczony jest do pracy ciągłej, a silnik jest przewietrzany niezależnym wentylatorem (chłodzenie wymuszone obce). Na rys. 3 pokazano charakterystyki maksymalnej mocy i maksymalnego momentu, które przy danej prędkości mogą być rozwijane przez taki napęd. Są one dwustrefowe. W miarę wzrostu prędkości silnika od zera mamy strefę stałego strumienia magnetycznego (stałego momentu). W strefie tej maksymalny prąd nie przekracza prądu znamionowego silnika, natomiast napięcie wzrasta wraz z prędkością obrotową, zachowując w przybliżeniu warunek $U/f = \text{const}$. Moment rozwijany przez napęd może zmieniać się od zera do momentu znamionowego. Po osiągnięciu przez silnik punktu pracy znamionowej rozpoczyna się strefa odwzbudzania (stałej mocy). Prąd i napięcie stojana, oraz moc silnika nie przekraczają wartości znamionowych. Napęd może rozwijać moc od zera do mocy znamionowej, natomiast maksymalny moment, który może być rozwijany przez silnik, jest w tej strefie odwrotnie proporcjonalny do prędkości obrotowej silnika. Moment maksymalny (utyku) silnika indukcyjnego wyraża się przybliżoną zależnością (przy pominięciu rezystancji stojana)

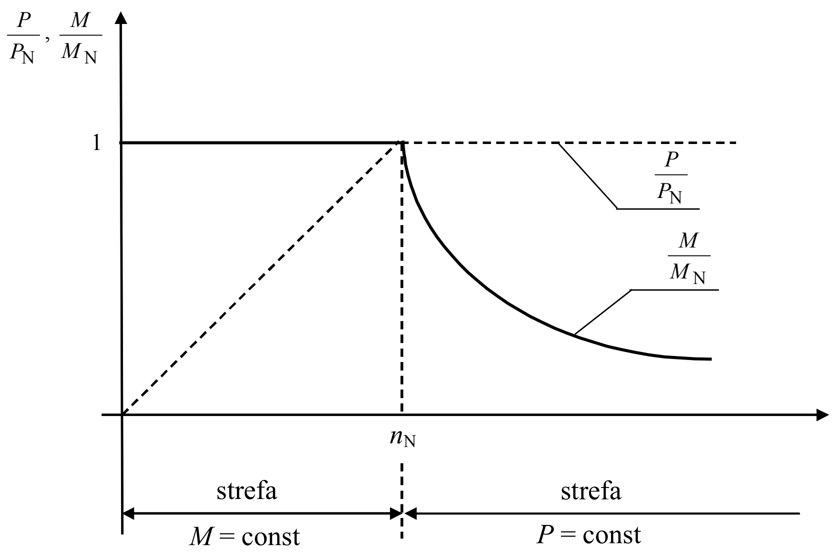
$$M_{\max} = \frac{\sqrt{3}U_1^2}{2\omega_1 X_\sigma} = M_{\max N}\left(\frac{U_1}{U_N}\right)^2\left(\frac{f_N}{f_1}\right)^2,$$

gdzie: U_1 – napięcie stojana (międzyprzewodowe);
ω_1 – prędkość kątowa synchroniczna;
X_σ – reaktancja rozproszenia silnika.

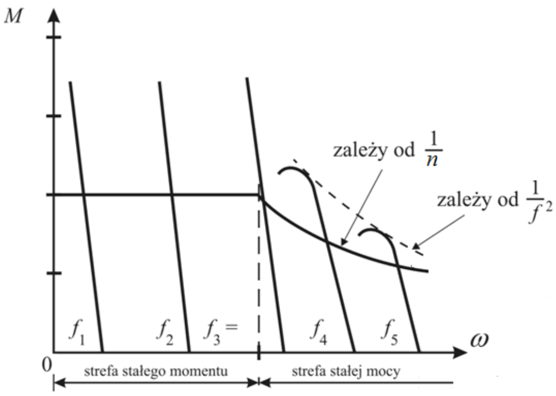
Ponieważ w strefie stałej mocy moment utyku silnika zmniejsza się ze wzrostem prędkości szybciej niż maksymalny moment obrotowy, który może być rozwijany przez napęd (rys. 4), przyjmuje się, że graniczną górną wartością częstotliwości strefy stałej mocy jest punkt, w którym moment utyku silnika zrówna się z maksymalną wartością momentu obrotowego, który może być rozwijany przez napęd (punkt R na rys. 5). Oczywiście w praktyce trzeba zachować pewną przeciążalność silnika (linia graniczna G rys. 5).



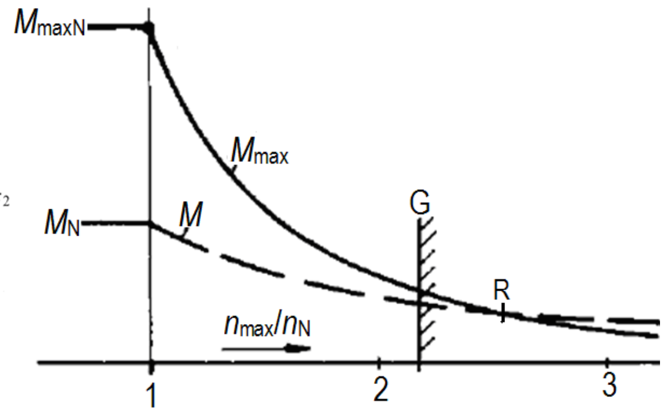
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Wyznacz tę teoretyczną, maksymalną częstotliwość napięcia zasilania silnika $f_{1\max}$ i odpowiadającą jej prędkość obrotową silnika, przy założeniu że silnik jest obciążony momentem oporowym, wynikającym z warunku stałej mocy. W rozważaniach pomiń rezystancję stojana i opory tarcia i przyjmij, że silnik może wirować z dowolnie dużą prędkością.

Rozwiązanie:

Wychodząc z następujących zależności

$$\omega_1 = 2\pi\, n_1/60 = \frac{2\pi \cdot f_1}{p}, \qquad \text{skąd} \qquad n_1 = \frac{60 f_1}{p} = 30 f_1,$$

w którym: p – liczba par biegunów ($p = 2$);

n_1– synchroniczna prędkość silnika.

Reaktancja rozproszenia stojana jest równa $X_\sigma = 2\pi f_1 L_\sigma$.

W strefie stałej mocy ($P = M\omega = \text{const}$) napięcie stojana jest stałe, zatem moment maksymalny silnika będzie odwrotnie proporcjonalny do kwadratu prędkości (rys. 4)

$$M_{\max} = M_{\max N}\left(\frac{f_N}{f_1}\right)^2.$$

Moment maksymalny (utyku) silnika zmniejsza się zatem szybciej niż maksymalny moment, który może rozwijać napęd, pokazany na rysunku 3. Jest on odwrotnie proporcjonalny do prędkości napędu n (rys. 5)

$$M = M_N\left(\frac{n_N}{n}\right).$$

Teoretyczna granica pracy napędu jest w punkcie, w którym moment maksymalny (utyku) silnika zrówna się maksymalnym momentem rozwijanym przez napęd (punkt R na rysunku 5), ale w praktyce trzeba pamiętać o zachowaniu pewnej przeciążalności silnika (linia G na rysunku 5).

A zatem, wpierw określimy poślizg znamionowy silnika

$$s_N = \frac{n_1 - n_N}{n_N} = 0{,}02.$$

potem zaś poślizg krytyczny w warunkach znamionowych

$$s_{kN} = s_N\left(\frac{M_N}{M_{\max N}} + \sqrt{\left(\frac{M_N}{M_{\max N}}\right)^2 - 1}\right) = 0{,}085.$$

Ponieważ

$$s_{kN} = \frac{R}{X_\sigma},$$

to przy dowolnej częstotliwości stojana f_1 poślizg krytyczny będzie równy

$$s_k = s_{kN}\left(\frac{f_{1N}}{f_1}\right).$$

Przecięcie obu krzywych nastąpi w przybliżeniu przy poślizgu krytycznym silnika przy zasilaniu stojana napięciem o częstotliwości f_{1max}. A zatem przy częstotliwości maksymalnej f_{max} wartość poślizgu krytycznego, odpowiadająca prędkości obrotowej n_{max}, będzie mniejsza od znamionowego poślizgu krytycznego i wyniesie

$$s_{kmax} = s_{kN}\left(\frac{f_{1N}}{f_{1max}}\right),$$

natomiast prędkość obrotowa odpowiadająca tej częstotliwości przy poślizgu krytycznym

$$n_{max} = n_{1max}(1 - s_{kmax}) = 30 f_{1max}\,(1 - s_{kmax}).$$

Współrzędne przecięcia się obu krzywych momentu muszą spełnić równanie

$$M_{max} = M_{maxN}\left(\frac{f_N}{f_{1max}}\right)^2 = M_N\left(\frac{n_N}{n}\right) = M_N\left(\frac{n_N}{30 f_{1max}\left[1 - s_{kN}\left(\frac{f_N}{f_{1max}}\right)\right]}\right).$$

W mianowniku ostatniego ułamka zachodzi nierówność

$$s_{kN}\left(\frac{f_N}{f_{1max}}\right) << 1,$$

zatem pierwszy element nierówności można pominąć w poprzednim równaniu (wynosi on w przybliżeniu 0,04). Równanie upraszcza się do postaci

$$M_{max} = M_{maxN}\left(\frac{f_N}{f_{1max}}\right)^2 \approx M_N\left(\frac{n_N}{30 f_{1max}}\right),$$

co oznacza, że w strefie osłabiania mocy prędkość silnika jest proporcjonalna do częstotliwości.
Nie jest błędem, jeżeli ktoś napisze to równanie w ten sposób od razu, gdyż poślizgi silnika w strefie osłabiania mocy, szczególnie w jej górnym zakresie, są bardzo małe i można je zaniedbać.
Z ostatniego równania mamy ostatecznie

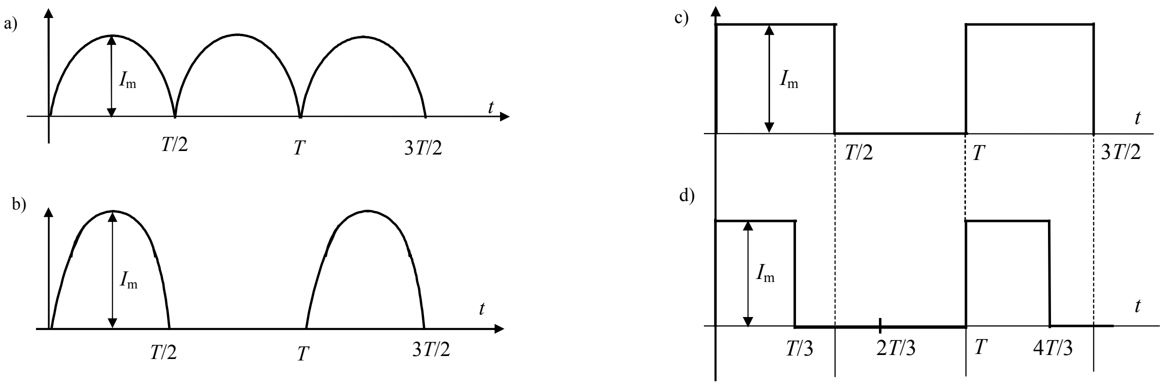
$$f_{1max} \approx \frac{M_{maxN}}{M_N}\cdot\frac{30 f_N^2}{n_N} = 114\ \text{Hz}.$$

Odpowiada to prędkości (obliczonej z przybliżonego wzoru)

$$n_{max} \approx n_{1max} = 30 f_{1max} = 3420\ \text{obr/min}.$$

Zadanie nr 5 (autor dr inż. Mirosław Miszewski)

Na rys. 6 przedstawiono cztery przebiegi okresowe prądu. Wiadomo o nich, że wszystkie one mają taką samą wartość okresu $T = 2$ ms oraz taką samą wartość średnią $I_{AV} = 10$ A. Oblicz, jaką moc będą wydzielać prądy o poszczególnych przebiegach na rezystorze o rezystancji 1 Ω.



Rys. 6

Rozwiązanie:

Znamy wartości średnie prądów, ale do obliczenia mocy musimy wyznaczyć wartości skuteczne tych prądów. Wartość okresu przebiegów nie ma w tym przypadku żadnego znaczenia, bo jest znacznie mniejsza od wartości cieplnej stałej czasowej rezystorów spotykanych w praktyce.

a) Jest to przebieg sinusoidalny, wyprostowany dwupołówkowo. Dla takiego przebiegu od razu mamy, na podstawie wartości średniej półokresowej dla przebiegu sinusoidalnego, a zarazem wartości średniej za cały okres dla przebiegu wyprostowanego dwupołówkowo:

$$I_{\mathrm{AV}} = \frac{2}{\pi} I_{\mathrm{m}}.$$

Z drugiej strony wiadomo, że wartość skuteczna takiego przebiegu nawet po wyprostowaniu (szukamy średniej z kwadratu przebiegu, więc znak nie ma tu znaczenia – wartości całek w obu półokresach są takie same) wynosi

$$I_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} i^2 \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} i^2 \,\mathrm{d}t\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\mathrm{m}}.$$

Z porównania mamy

$$I_{\mathrm{RMS}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\, I_{\mathrm{AV}}.$$

Zatem moc wydzielana na rezystorze będzie równa

$$P = I_{\mathrm{RMS}}^2 R = 123 \text{ W}.$$

b) Jest to przebieg sinusoidalny, wyprostowany jednopołówkowo. W tym przypadku wartość maksymalna musi być dwukrotnie większa, aby dać taką samą wartość średnią

$$I_{\mathrm{AV}} = \frac{1}{\pi} I_{\mathrm{m}}.$$

Wartość skuteczną prądu przedstawimy jako sumę całek w każdej połówce okresu, przy czym wartość całki w drugim półokresie równa jest zeru

$$I_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} i^2 \,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} 0 \cdot \mathrm{d}t\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} i^2 \,\mathrm{d}t\right)} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{m}} = \frac{\pi}{2} I_{\mathrm{AV}}.$$

Zatem moc wydzielana na rezystorze będzie równa

$$P = I_{\mathrm{RMS}}^2 R = 247 \text{ W}.$$

c) Tutaj sprawa jest prostsza, gdyż całkowanie możemy zastąpić zwykłym mnożeniem

$$I_{\mathrm{AV}} = \frac{\int_0^{T/2} I_{\mathrm{m}} dt + \int_{T/2}^{T} 0 \cdot dt}{T} = \frac{\frac{1}{2} I_m T}{T} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{m}},$$

$$I_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} I_{\mathrm{m}}^2 T} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\mathrm{m}} = \sqrt{2}\, I_{\mathrm{AV}},$$

$$P = 200 \text{ W}.$$

d) Mamy podobną sytuację, co w poprzednim przypadku

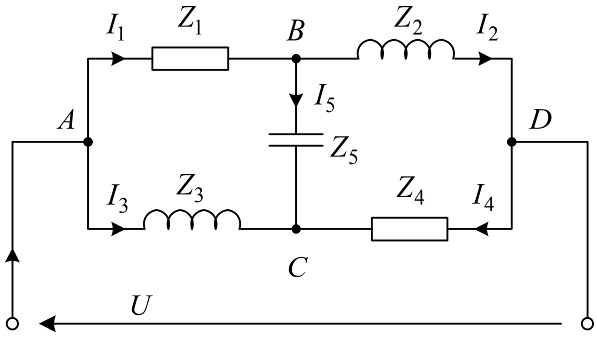
$$I_{\mathrm{AV}} = \frac{1}{3} I_{\mathrm{m}},$$

$$I_{\mathrm{RMS}} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{\mathrm{m}} = \sqrt{3}\, I_{\mathrm{AV}},$$

$P = 300$ W.

Zadanie nr 6 (autor dr inż. Eugeniusz Rożnowski)

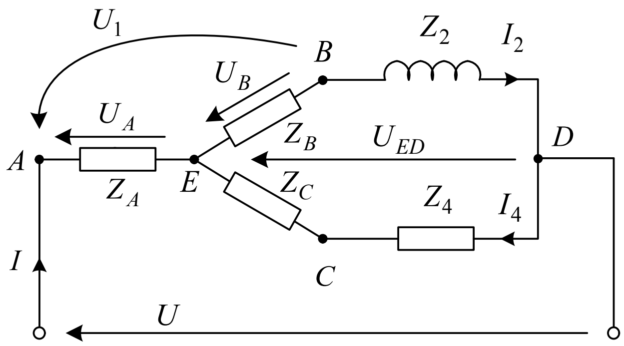
Stosując przekształcenie trójkąta w gwiazdę wyznacz wszystkie prądy w niezrównoważonym mostku (schemat na rys. 7). Napięcie zasilające U= 130 V. Impedancje gałęzi wynoszą: $\underline{Z}_1$= 10 Ω, $\underline{Z}_2$= j5,0 Ω, $\underline{Z}_3$= j10 Ω, $\underline{Z}_4$= 5,0 Ω oraz $\underline{Z}_5$= -j10 Ω. Wyznacz moc czynną, bierną i pozorną obwodu.



Rys. 7

Rozwiązanie:

- przekształcamy trójkąt ABC w gwiazdę



$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5} = \frac{10(\mathrm{j}10)}{10} = \mathrm{j}10\,\Omega \qquad \text{gdzie } \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 = 10 + \mathrm{j}10 - \mathrm{j}10 = 10\,\Omega$$

$$\underline{Z}_B = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_5}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5} = \frac{10(-\mathrm{j}10)}{10} = -\mathrm{j}10\,\Omega$$

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_5}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5} = \frac{\mathrm{j}10(-\mathrm{j}10)}{10} = 10\,\Omega$$

$$\underline{Z}_I = \underline{Z}_B + \underline{Z}_2 = -\mathrm{j}10 + \mathrm{j}5 = -\mathrm{j}5\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{II} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_4 = 10 + 5 = 15\Omega$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_I \cdot \underline{Z}_{II}}{\underline{Z}_I + \underline{Z}_{II}} = \frac{(-\mathrm{j}5)(15)}{15 - \mathrm{j}5} = \frac{-\mathrm{j}75}{15 - \mathrm{j}5} = (1{,}5 - \mathrm{j}4{,}5)\,\Omega$$

$$\underline{Z}_W = \underline{Z}_A + \underline{Z} = \mathrm{j}10 + 1{,}5 - \mathrm{j}4{,}5 = (1{,}5 + \mathrm{j}5{,}5)\,\Omega$$

- wyznaczamy prąd $\underline{I}$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_W} = \frac{130}{1{,}5 + \mathrm{j}5{,}5} = (6 - \mathrm{j}22)\ \mathrm{A}$$

- wyznaczamy napięcie między zaciskami ED

$$\underline{U}_{ED} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = (6 - \mathrm{j}22)(1{,}5 - \mathrm{j}4{,}5) = (-90 - \mathrm{j}60)\ \mathrm{V}$$

- wyznaczamy prąd $\underline{I}_2$ oraz $\underline{I}_4$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ED}}{\underline{Z}_I} = \frac{-90 - \mathrm{j}60}{-\mathrm{j}5} = (12 - \mathrm{j}18)\ \mathrm{A}$$

$$\underline{I}_4 = \frac{-\underline{U}_{ED}}{\underline{Z}_{II}} = \frac{90 + \mathrm{j}60}{15} = (6 + \mathrm{j}4)\ \mathrm{A}$$

-wyznaczamy prąd $\underline{I}_1$

$$\underline{U}_A = \underline{I} \cdot \underline{Z}_A = (6 - \mathrm{j}22)(\mathrm{j}10) = (220 + \mathrm{j}60)\ \mathrm{V}$$

$$\underline{U}_B = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_B = (12 - \mathrm{j}18)(-\mathrm{j}10) = (-180 - \mathrm{j}120)\ \mathrm{V}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_A + \underline{U}_B = (40 - \mathrm{j}60)\ \mathrm{V}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{40 - \mathrm{j}60}{10} = (4 - \mathrm{j}6)\ \mathrm{A}$$

- prąd $\underline{I}_3$ można wyznaczyć z pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzła A

$$\underline{I}_3 = \underline{I} - \underline{I}_1 = (6 - \mathrm{j}22) - (4 - \mathrm{j}6) = (2 - \mathrm{j}16)\ \mathrm{A}$$

- prąd $\underline{I}_5$ wyznaczamy z węzła B

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_5 - \underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = (4 - \mathrm{j}6) - (12 - \mathrm{j}18) = (-8 + \mathrm{j}12)\ \mathrm{A}$$

- wyznaczamy moce występujące w obwodzie

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + \mathrm{j}Q = 130(6 + \mathrm{j}22) = (780 + \mathrm{j}2860)\ \mathrm{VA}$$

- moc czynna P=780 W

- moc bierna Q=2860 var