



„EUROELEKTRA”
Ogólnopolska Olimpiada Wiedzy Elektrycznej i Energetycznej
Rok szkolny 2022/2023

Odpowiedzi do zadań dla grupy elektrycznej na zawody II stopnia

Zadanie 1

Moc rezystora R_1 o znanej rezystancji R_1 włączonego do sieci elektrycznej o niezmiennym napięciu U jest wynosi P . Do rezystora R_1 dołączono szeregowo rezystor o rezystancji R . Jaka powinna być wartość rezystancji R , aby przy tym samym napięciu sieci moc rezystora R_1 była n razy mniejsza od mocy P (znana jest wartość n)?

Rozwiązanie

Moc pobierana przez rezystancję R_1 przed włączeniem dodatkowej rezystancji wynosi:

$$P = \frac{U^2}{R_1} \quad (1)$$

Po dołączeniu szeregowo rezystora R do rezystora R_1 odkłada się na rezystorze o rezystancji R_1 napięcie U_1 , zatem moc pobierana przez rezystancję R_1 wynosi

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} \quad (2)$$

Oznaczając przez I natężenie prądu płynącego przez rezystancję R i R_1 i korzystając z dzielnika napięcia można wyznaczyć spadek napięcia na rezystorze R_1

$$U_1 = U \frac{R_1}{R + R_1} \quad (3)$$

W następnej kolejności wyznaczony spadek napięcia podstawiamy do wyrażenia na moc pobieraną przez rezystancję R_1 po dołączeniu dodatkowej rezystancji R

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} \cdot \frac{R_1^2}{(R + R_1)^2} = P \cdot \frac{R_1^2}{(R + R_1)^2} \quad (4)$$

Wykorzystując informację z treści zadania, że po dołączaniu szeregowo rezystancji R do rezystancji R_1 i przy nie zmienionym napięciu sieci moc rezystora R_1 jest n razy mniejsza od mocy P , co oznacza, że można zapisać następującą zależność

$$P_1 = \frac{P}{n} \quad (5)$$

Następnie podstawiając równanie (4) do równania (5) otrzymujemy następującą zależność

$$\frac{P}{n} = P \cdot \frac{R_1^2}{(R + R_1)^2} \quad (6)$$

Następnie dokonując redukcji zależności (6) ostatecznie otrzymujemy zależność na wartość rezystancji R

$$R = R_1 \cdot (\sqrt{n} - 1)$$

Odpowiedź:

Po dołączeniu szeregowo rezystancji R do rezystancji R_1 i przy niezmiennym napięciu sieci moc rezystora R_1 będzie n razy mniejsza od mocy P w przypadku, gdy wartość rezystora R będzie wynosiła $R = R_1 \cdot (\sqrt{n} - 1)$.

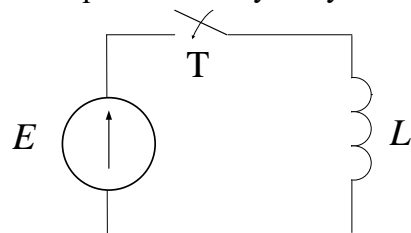
Zadanie 2

Idealna cewka o indukcyjności L dołączona została do źródła napięcia stałego o napięciu E . Po jakim czasie natężenie prądu cewki osiągnie wartość 100 A? Należy założyć, że przed załączeniem napięcia nie ma w cewce zgromadzonej energii.

Dane: $E = 100 \text{ V}$, $L = 1,00 \text{ H}$

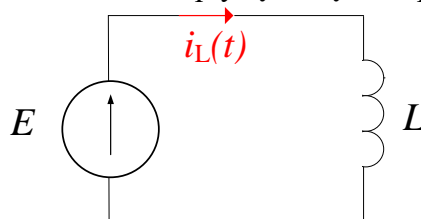
Rozwiązanie

Analizowany obwód elektryczny został przedstawiony na rysunku 1



Rysunek 1. Obwód elektryczny

Z treści zadania wiadomo, że przed zmianą pozycji łącznika oznaczonego symbolem T w cewce nie ma zgromadzonej energii. Pozwala to na zapisanie warunku początkowego dla analizowanego obwodu przez zimną pozycję łącznika wiadomo, że $i_L(0^-) = 0 \text{ A}$. Po zmianie pozycji łącznika oznaczonego symbolem T zaczyna w obwodzie płynąć natężenie prądu.



Rysunek 2. Obwód elektryczny po zmianie pozycji przełącznika T

Dla obwodu elektrycznego przedstawionego na rysunku 2 na podstawie II Prawa Kirchhoffa można równanie

$$E = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (1)$$

Zależność (1) jest równaniem o rozdzielonych zmiennych, z związku z tym można rozdzielić różniczkę dt i $di_L(t)$ i zapisaniu równania (1) w postaci:

$$di_L(t) = \frac{E}{L} dt \quad (2)$$

Następnie równanie (2) obustronnie całkujemy

$$\int di_L(t) = \frac{E}{L} \int dt \quad (3)$$

Odcałkowując zależność (3) otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$i_L(t) = \frac{E}{L} \cdot t + C \quad (4)$$

gdzie: C jest dowolną stałą, którą można wyznaczyć korzystając z warunku początkowego $i_L(0^-) = 0$ A dla czasu $t = 0$ s i wykorzystując I Prawo komutacji

Z prawa komutacji wynika, że natężenie prądu płynącego przez cewkę nie może się zmienić skokowo, zatem musi zachodzić następująca zależność w chwili $t = 0$:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

gdzie: $t = 0^-$ oznacza moment poprzedzający komutację, $t = 0^+$ oznacza moment bezpośrednio po komutacji.

Z prawa komutacji wynika, że wartość natężenia prądu płynącego cewką tuż po zmianie pozycji łącznika **T** będzie wynosiła $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$ A

Korzystając z powyższych warunków i równania 4 można wyznaczyć stałą dla czasu $t = 0$ s

$$\begin{aligned} i_L(0^+) &= \frac{E}{L} \cdot 0 + C \\ C &= i_L(0^+) - \frac{E}{L} \cdot 0 = 0 - \frac{100}{1} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Po wyznaczeniu całej całkowania C równanie (4) można zapisać następująco

$$i_L(t) = \frac{E}{L} \cdot t \quad (6)$$

W celu określenia po jakim czasie wartość natężenia prądu płynącego przez idealną cewkę wyniesie 100 A należy równanie 6 przekształcić

$$t = \frac{L}{E} \cdot i_L(t) \quad (7)$$

Następnie podstawiając dane liczbowe otrzymujemy

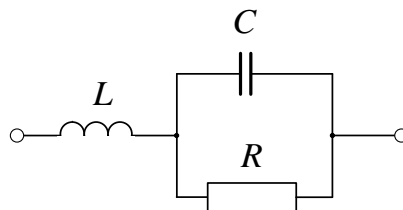
$$t = \frac{1}{100} \cdot 100 = 1 \text{ [s]} \quad (8)$$

Odpowiedź:

Po czasie 1 s natężenie prądu płynącego przez cewkę osiągnie wartość 100 A.

Zadanie 3

Wykaż, że impedancja zastępcza w obwodzie pokazanym na rysunku 1, przy częstotliwości rezonansowej wynosi $\frac{L}{R \cdot C}$.



Rysunek 3. Obwód elektryczny

Rozwiązanie

W pierwszej kolejności można wyznaczyć impedancję wypadkową gałęzi równoległej RC

$$\underline{Z}_{RC} = \frac{R(-j\frac{1}{\omega C})}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{-jR}{R\omega C - j} = \frac{-jR(R\omega C + j)}{R^2\omega^2 C^2 + 1} = \frac{R}{R^2\omega^2 C^2 + 1} - j\frac{R^2\omega C}{R^2\omega^2 C^2 + 1}$$

Następnie można zapisać zależność na impedancja wypadkowa obwodu elektrycznego przedstawionego na rysunku 3

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{RC} + j \cdot \omega L = \frac{R}{R^2 \omega^2 C^2 + 1} + j \cdot \left(\omega L - \frac{R^2 \omega C}{R^2 \omega^2 C^2 + 1} \right)$$

Rezonans w obwodzie zachodzi wówczas, gdy reaktancja wypadkowa obwodu elektrycznego przedstawionego na rysunku 3 jest równa zero

Warunek rezonansu jest następujący

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\underline{Z}) &= 0 \\ \omega L - \frac{R^2 \omega C}{R^2 \omega^2 C^2 + 1} &= 0 \end{aligned}$$

W następnym kroku dokonywanych jest szereg przekształceń

$$\begin{aligned} \omega L &= \frac{R^2 \omega C}{R^2 \omega^2 C^2 + 1} \\ (R^2 \omega^2 C^2 + 1)L &= R^2 C \\ \omega^2 R^2 C^2 L &= R^2 C - L \end{aligned}$$

Z powyższej zależności można wyznaczyć pulsację, dla której będzie zachodziła nierówność $\operatorname{Im}(\underline{Z}) = 0$. Pulsacja rezonansowa będzie wynosiła:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{R^2 C - L}{R^2 C^2 L}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}}$$

Następnie można wyznaczyć częstotliwość rezonansowa

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}}$$

W przypadku wystąpienia rezonansu wiadomo, że impedancja wypadkowa obwodu przy rezonansie jest równa części rzeczywistej impedancji, gdyż część urojona impedancji jest równa zero, czyli:

$$Z = \operatorname{Re}(\underline{Z}) = \frac{R}{R^2 \omega_r^2 C^2 + 1}$$

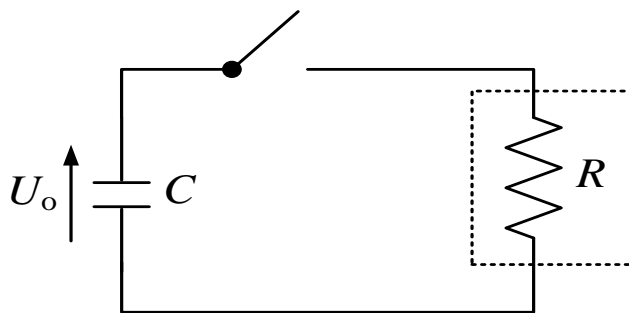
Następnie podstawiamy wyznaczoną wartość pulsacji rezonansowej ω_r i dokonując przekształceń matematycznych otrzymujemy impedancję:

$$Z = \frac{R}{R^2 C^2 \frac{R^2 C - L}{R^2 C^2 L} + 1} = \frac{R}{\frac{R^2 C - L}{L} + 1} = \frac{R}{\frac{R^2 C}{L} - 1 + 1} = \frac{L}{RC}$$

Co należało UDOWIDNIĆ?

Zadanie 4

Bateria kondensatorów naładowana została do napięcia $U_0 = 250 \text{ V}$. Grzałka o rezystancji $R = 1,0 \, \Omega$ podgrzała 5 litrów wody w idealnym bojlerze w wyniku całkowitego rozładowania się kondensatora zwiększając temperaturę wody od $20 \, ^\circ\text{C}$ do $40 \, ^\circ\text{C}$. Jaka była pojemność wypadkowa baterii kondensatorów? Należy przyjąć ciepło właściwe wody $c_w = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.



Rysunek 4. Obwód elektryczny do podgrzewania wody

Rozwiązanie

Z treści zadania wiadomo, że można obliczyć ilość ciepła potrzebna do ogrzania wody, która jest wprost proporcjonalna do iloczynu jej masy i przyrostu temperatury.

$$Q = c_w \cdot m \cdot \Delta T = c_w \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$$

gdzie: ciepło właściwe wody $c_w = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, m – masa wody, można przyjąć, że 1 litr = 1 kg, ΔT – zmiana temperatury wody.

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy, że ilość ciepła potrzebna do ogrzania wody o masie 5 kg od temperatury 20°C do 40°C potrzeba 0,42 GJ.

$$Q = 4,2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot (40 - 20) = 4,2 \cdot 10^5 [\text{J}] = 0,42 [\text{GJ}]$$

W celu określenia pojemności kondensatora, który będzie wstanie zmagazynować energię o wartości 0,42 GJ należy skorzystać z zależności na energię zgromadzoną w kondensatorze

$$E = \frac{1}{2} \cdot U^2 \cdot C$$

Gdzie: E – energia zgromadzona w kondensatorze [J], U – napięcie, jakie zostało przyłożone między okładzinami kondensatora [V], C – pojemność kondensatora [F].

Przekształcając powyższą zależność, można otrzymać wartość pojemności kondensatora, który będzie wstanie zgromadzić energię $E = 0,42 \text{ GJ}$ przy napięciu zasilającym równym $U = 250 \text{ V}$

$$C = \frac{2 \cdot E}{U^2} = \frac{2 \cdot 0,42 \cdot 10^6}{250^2} = 13,44 [\text{F}]$$

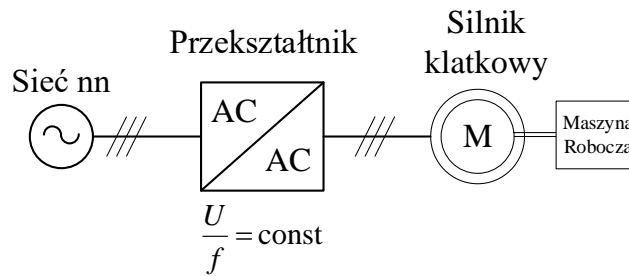
Odpowiedź:

Grzałka o rezystancji $R = 1,0 \Omega$ będzie wstanie podgrzać 5 litrów wody w idealnym bojlerze w wyniku całkowitego rozładowania się kondensatora zwiększając temperaturę wody od 20 °C do 40 °C w przypadku, kiedy pojemność kondensatora będzie wynosiła 13,4 F.

Zadanie 5

Trójfazowy silnik klatkowy o danych: moc znamionowa $P_N = 160 \text{ kW}$, napięcie znamionowe $U_N = 400 \text{ V}$; częstotliwość znamionowa $f_N = 50 \text{ Hz}$; prędkość obrotowa znamionowa $n_N = 990 \text{ obr/min}$; liczba par biegunów $p = 3$, przeciążalność znamionowa $\lambda_N = 3,0$ jest obciążony stałym momentem równym 80% momentu znamionowego. Silnik zasilany jest z przekształtnika AC/AC (rysunek 5), który umożliwia regulację napięcia zasilającego przy zachowaniu algorytmu sterowania $U/f = \text{const}$. Należy obliczyć ustaloną wartość prędkości wirowania silnika, w

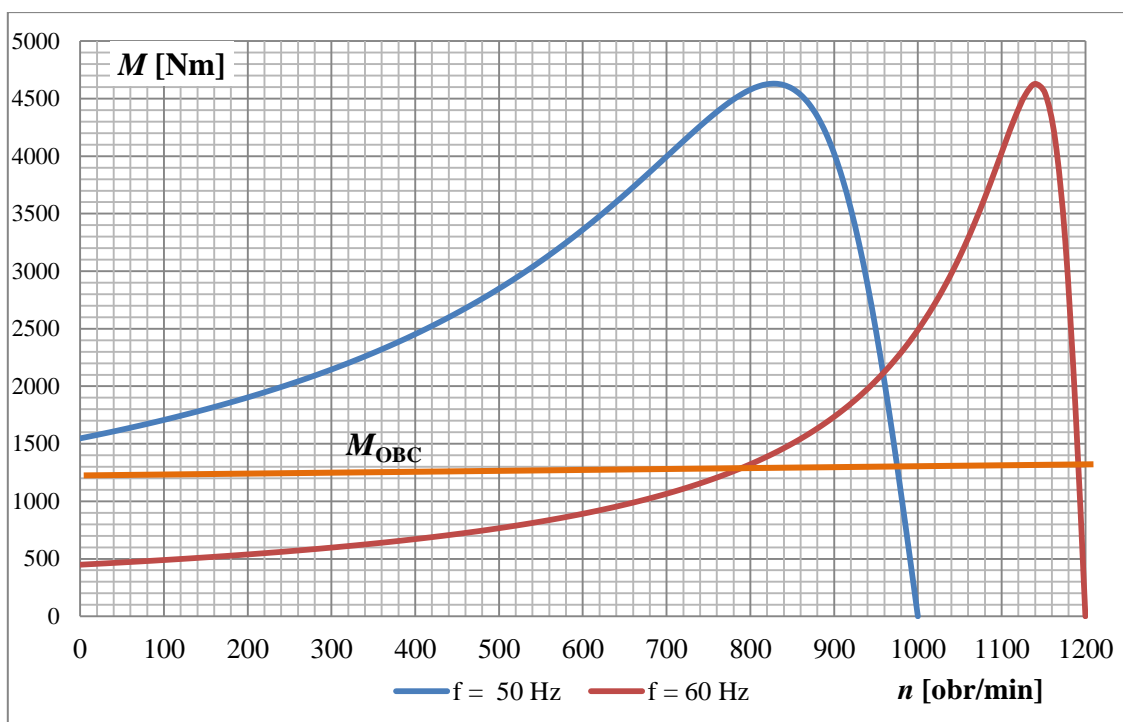
przypadku, gdy częstotliwość napięcia zasilającego silnik zwiększy się do 60 Hz, przy niezmiennym obciążeniu.



Rysunek 5. Zasilanie układu napędowego przez przekształtnik AC/AC

Rozwiązanie:

Charakterystyki mechaniczne silnika (naturalną i sztuczną) po zmianie częstotliwości zasilającego, przy zachowaniu $U/f = \text{const}$, przedstawiono na rysunku 6.



Rysunek 6. Charakterystyki mechaniczne silnika, przy różnej częstotliwości zasilania przy zachowaniu $U/f = \text{const}$

Z charakterystyki mechanicznej silnika, która została przedstawiona na rysunku 6 można zauważyć, że zmiana częstotliwości napięcia zasilającego do 60 Hz spowoduje, że prędkość rozwijana przez silnik ulegnie zwiększeniu. Prędkość obrotową po zmianie częstotliwości napięcia zasilającego można obliczyć z zależności

$$n = \frac{60 \cdot f}{p} (1 - s) \quad (1)$$

Niewiadomą w tej zależności jest poślizg dla nowych warunków pracy silnika. Obliczyć go można wykorzystując

Analizując zależność 1 można zauważyć, że do wyznaczenia prędkości rozwijanej przez silnik po zwiększeniu częstotliwości napięcia zasilającego należy wyznaczyć poślizg s przy momencie hamującym równym 80% momentowi znamionowemu. Ten poślizg można wyznaczyć po przekształceniu równania Klossa (2)

$$\frac{M}{M_{kN}} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \quad (2)$$

$$s = s_k \cdot \left(\frac{M_{kN}}{M} - \sqrt{\left(\frac{M_{kN}}{M} \right)^2 - 1} \right) \quad (3)$$

gdzie: M – moment hamującym równy 80% momentowi znamionowemu, M_{kN} – moment krytyczny znamionowy, gdyż zmiana częstotliwości napięcia zasilającego przy zachowaniu przy zachowaniu $U/f = \text{const}$ jest stały, s_k – poślizg krytyczny przy częstotliwości napięcia zasilającego wynoszącego 60 Hz. Zmiana częstotliwości napięcia zasilającego wpływa na poślizg krytyczny silnika.

W celu wyznaczenia poślizgu s należy wyznaczyć moment hamujący, który równy jest 80% momentowi znamionowemu, poślizg krytyczny przy częstotliwości 60 Hz oraz znamionowy moment krytyczny.

Moment znamionowy silnika, który wyznacza się z zależności (4)

$$M_N = 9,55 \cdot \frac{P_N}{n_N} = 9,55 \cdot \frac{160000}{990} = 1543,43 \text{ [Nm]} \quad (4)$$

Znamionowy moment krytyczny można wyznaczyć z przeciążalności silnika

$$\lambda_N = \frac{M_{kN}}{M_N} \quad (5)$$

$$M_{kN} = \lambda_N \cdot M_N = 3,0 \cdot 1543,43 = 4630,30 \text{ [Nm]}$$

Moment obciążenia w nowych warunkach pracy wynosi:

$$M = 0,8 \cdot M_N = 0,8 \cdot 1543,43 = 1234,75 \text{ [Nm]} \quad (6)$$

Z teorii maszyn wiadomo, że przy w przypadku, kiedy zmienia się częstotliwość napięcia zasilającego przy zachowaniu $U/f = \text{const}$ to moment krytyczny silnika jest stały a poślizg jest odwrotnie proporcjonalny do częstotliwości napięcia zasilającego. Dzięki temu można zapisać zależność na poślizg krytyczny w przypadku, kiedy silnik zasilany napięciem o częstotliwości 50 Hz (7) oraz przy zwiększonej częstotliwości napięcia zasilającego do wartości 60 Hz (8).

Znamionowy poślizg krytyczny w przypadku, kiedy silnik zasilany jest napięciem o częstotliwości 50 Hz

$$s_{kN} = c \cdot \frac{1}{f_N} \quad (7)$$

Poślizg krytyczny w przypadku, kiedy silnik zasilany jest napięciem o częstotliwości 60 Hz

$$s_k = c \cdot \frac{1}{f} \quad (8)$$

Następnie wykorzystując proporcje z równania 7 i 8 można wyznaczyć poślizg krytyczny, kiedy silnik zasilany jest napięciem o częstotliwości 60 Hz

$$s_k = s_{kN} \cdot \frac{f_N}{f} \quad (9)$$

Równanie (9) wskazuje, że brakuje informacji o znamionowym poślizgu krytycznym, można go wyznaczyć z równania Klossa (2)

$$s_{kN} = s_N \cdot \left(\frac{M_{kN}}{M_N} + \sqrt{\left(\frac{M_{kN}}{M_N} \right)^2 - 1} \right) \quad (10)$$

W celu wyznaczenia znamionowego poślizgu krytycznego należy jeszcze określić znamionowy poślizg, który można wyznaczyć z zależności (11):

$$s_N = 1 - \frac{n_N}{n_{sN}} = 1 - \frac{n_N}{\frac{60 \cdot f_N}{p}} = 1 - \frac{990}{\frac{60 \cdot 50}{3}} = 1 - \frac{990}{1000} = 0,01 \quad (11)$$

Wartość wyznaczoną z równania (11) można podstawić do zależności (10) w celu wyznaczenia znamionowego poślizgu krytycznego

$$s_{kN} = 0,01 \cdot \left(\frac{4630,30}{1543,43} + \sqrt{\left(\frac{4630,30}{1543,43} \right)^2 - 1} \right) = 0,0583 \quad (12)$$

Następnie wykorzystując równanie (9) można wyznaczyć poślizg krytyczny, kiedy silnik zasilany jest napięciem o częstotliwości 60 Hz

$$s_k = 0,0583 \cdot \frac{50}{60} = 0,0486 \quad (13)$$

Po wyznaczeniu brakujących danych z równania (5), (6) i (10) a następnie podstawiając je do równania (3) można obliczyć poślizg przy obciążeniu silnika momentem hamującym równym 80% momentowi znamionowemu i przy zasilaniu silnika napięciem o częstotliwości 60 Hz przy zachowaniu sterowania $U/f = \text{const}$.

$$s = 0,0486 \cdot \left(\frac{4630,30}{1234,75} - \sqrt{\left(\frac{4630,30}{1234,75} \right)^2 - 1} \right) = 0,0066 \quad (14)$$

Prędkość obrotową po zmianie częstotliwości napięcia zasilającego można obliczyć z zależności

$$n = \frac{60 \cdot f}{p} (1 - s) = \frac{60 \cdot 60}{p3} (1 - 0,0066) = 1192,09 \frac{\text{obr}}{\text{min}} \quad (15)$$

Odpowiedź:

Prędkość wirowania silnika, w przypadku, gdy częstotliwość napięcia zasilającego silnik zwiększy się do 60 Hz, przy niezmienionym obciążeniu będzie wynosiła 1192 obr/min.