



**„EUROELEKTRA”**  
**Ogólnopolska Olimpiada Wiedzy Elektrycznej i Elektronicznej**  
**Rok szkolny 2013/2014**

**Zadania z rozwiązaniami z elektrotechniki na zawody II stopnia**

**Zadanie 1**

W zakładowej stacji transformatorowej 15/0,4 kV zainstalowano cztery identyczne transformatory o danych:  $S_n = 1000 \text{ kVA}$ ,  $U_{1n} = 15750 \text{ V}^{\pm 2 \times 2,5\%}$ ,  $U_{2n} = 400 \text{ V}$ , Dyn11,  $u_k = 6\%$ ,  $\Delta P_0 = 2300 \text{ W}$ ,  $\Delta P_{\text{Cu}75} = 9600 \text{ W}$ . Transformatory pracują na głównym zaczepek przełącznika zaczepek. W tym stanie pracy wszystkie mają jednakowe napięcia zwarcia, równe znamionowemu napięciu zwarcia, oraz jednakowe przekładnie. Bieżące obciążenie zakładu wynosi  $S_\Sigma = 1800 \text{ kVA}$ . Ile transformatorów należy załączyć do pracy równoległej, aby straty przy transformacji były najmniejsze? Przyjmij, że napięcie zasilania transformatorów jest stałe i równe znamionowemu.

**Rozwiązanie**

Straty mocy pojedynczego transformatora, zasilanego napięciem znamionowym, przy dowolnym obciążeniu można wyrazić wzorem

$$\Delta P = \Delta P_0 + \Delta P_{\text{Cu}75} \cdot \beta^2,$$

w którym  $\beta$  – współczynnik obciążenia transformatora

$$\beta = \frac{I}{I_n},$$

gdzie  $I$  i  $I_n$  to odpowiednio prąd obciążenia i prąd znamionowy transformatora. W przypadku pracy równoległej  $n$  identycznych transformatorów straty transformacji są równe sumie strat wszystkich pracujących transformatorów

$$\Delta P = n \cdot (\Delta P_0 + \Delta P_{\text{Cu}75} \cdot \beta^2),$$

a współczynnik obciążenia jednego transformatora wyniesie

$$\beta = \frac{S_\Sigma}{n \cdot S_n}.$$

Ponieważ obciążenie stacji  $S_\Sigma = 1800 \text{ kVA}$  jest większe od mocy pojedynczego transformatora, to trzeba przeanalizować pracę równoległą 2, 3 lub 4 transformatorów. W przypadku pracy równoległej  $n$  transformatorów o parametrach określonych w treści zadania sumaryczne straty mocy można wyrazić wzorem

$$\Delta P = n \{ 2300 + 9600 \cdot [1800 / (n \cdot 1000)]^2 \}.$$

Wyniosą one dla  $n = 2$ :

$$\Delta P = 2 \cdot [2300 + 9600 \cdot (1,8/2)^2] = 20152 \text{ W},$$

dla  $n = 3$ :

$$\Delta P = 3 \cdot [2300 + 9600 \cdot (1,8/3)^2] = 17268 \text{ W},$$

i dla  $n = 4$ :

$$\Delta P = 4 \cdot [2300 + 9600 \cdot (1,8/4)^2] = 16976 \text{ W}.$$

Do pracy równoległej należy załączyć wszystkie cztery transformatory zainstalowane w stacji transformatorowej, gdyż wtedy straty mocy są najmniejsze.

## Zadanie 2

Silnik indukcyjny klatkowy ma następujące dane znamionowe, określone dla temperatury uzwojeń maszyny równej  $\vartheta_0 = 40^\circ\text{C}$ :

$U_n = 400 \text{ V}$  – napięcie znamionowe,

$P_n = 55 \text{ kW}$  – moc znamionowa,

$f_n = 50 \text{ Hz}$  – częstotliwość znamionowa,

$n_n = 1470 \text{ obr/min}$  – znamionowa prędkość obrotowa,

$\lambda_n = M_{\max n}/M_n = 2,24$  – przeciążalność znamionowa.

Przy obciążeniu silnika pewnym stałym momentem oporowym jego prędkość obrotowa przy temperaturze uzwojeń równej  $40^\circ\text{C}$  wyniosła  $1480 \text{ obr/min}$ . W czasie pracy silnika, zasilanego z falownika tranzystorowego, jego uzwojenia nagrzały się do temperatury  $\vartheta = 150^\circ\text{C}$ . Jak zmieni się przy tej temperaturze uzwojeń prędkość obrotowa silnika przy niezmiennym momencie oporowym i o ile procent zmniejszy się lub zwiększy moment rozruchowy silnika? W rozważaniach pominij wpływ zmian rezystancji uzwojenia stojana silnika na parametry silnika oraz skorzystaj z uproszczonego wzoru Klossa.

Wskazówka:

zależność rezystancji uzwojeń, wykonanych z miedzi lub aluminium, od temperatury opisuje następujący wzór

$$R_\vartheta = R_0 \frac{235 + \vartheta}{235 + \vartheta_0},$$

w którym:  $R_\vartheta$  – rezystancja uzwojeń silnika w temperaturze  $\vartheta$ ,

$R_0$  – rezystancja uzwojeń w temperaturze  $\vartheta_0$ .

## Rozwiązanie

Dla temperatury uzwojeń  $40^\circ\text{C}$  wyznaczamy poślizg znamionowy

$$s_n = \frac{n_{0n} - n_n}{n_{0n}} = \frac{1500 - 1470}{1500} = 0,02,$$

oraz poślizg krytyczny

$$s_{kn} = s_n (\lambda_n + \sqrt{\lambda_n^2 - 1}) = 0,02 \cdot (2,24 + \sqrt{2,24^2 - 1}) = 0,08489,$$

poślizg przy obciążeniu nieznanym momentem oporowym

$$s = \frac{n_{0n} - n}{n_{0n}} = \frac{1500 - 1480}{1500} = 0,01333,$$

przeciążalność silnika przy obciążeniu nieznanym momentem oporowym

$$\lambda = \frac{M_{\max n}}{M} = \frac{\frac{s}{s_{kn}} + \frac{s_{kn}}{s}}{2} = \frac{\frac{0,01333}{0,08489} + \frac{0,08489}{0,01333}}{2} = 3,262.$$

Przy temperaturze uzwojeń  $150^\circ\text{C}$  moment maksymalny silnika nie uległ zmianie, gdyż jego wartość nie zależy od rezystancji  $R'_2$ . Zatem  $M_{\max}^* = M_{\max n}$ . Zmianie natomiast ulegnie rezystancja uzwojenia wirnika

$$R_2^* = R'_{2n} \frac{235 + \vartheta}{235 + \vartheta_0} = R'_{2n} \frac{235 + 150}{235 + 40} = 1,4 R'_{2n},$$

a tym samym poślizg krytyczny silnika

$$s_k^* = \frac{R_2^*}{X_1 + X_2'} = 1,4 s_{kn} = 1,4 \cdot 0,08489 = 0,1188.$$

Zatem poślizg odpowiadający poszukiwanej prędkości będzie równy

$$s^* = s_k^* (\lambda^* - \sqrt{\lambda^{*2} - 1}) = 0,1188 \cdot (3,262 - \sqrt{3,262^2 - 1}) = 0,01867,$$

prędkość zaś wyniesie

$$n^* = n_0(1 - s^*) = 1500 \cdot (1 - 0,01867) = 1472 \text{ obr/min}.$$

Można też skorzystać ze wzorów przybliżonych. Ponieważ moment oporowy jest mniejszy od momentu znamionowego, możemy z dobrą dokładnością linearyzować charakterystykę mechaniczną silnika

$$M = M^* \approx 2M_{\max n} \cdot \frac{s}{s_k} = 2M_{\max n} \cdot \frac{s^*}{s_{kn}^*},$$

a na tej podstawie  $s^* = s \cdot \frac{s_k^*}{s_{kn}} = 0,01333 \cdot 1,4 = 0,01867$ .

Wynik jest identyczny z wynikiem uzyskanym za pomocą wzorów dokładnych.

W celu obliczenia momentu rozruchowego należy najpierw obliczyć moment znamionowy silnika

$$M_n = \frac{P_n}{\omega_n} = \frac{60P_n}{2\pi n_n} = \frac{60 \cdot 55 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 1470} = 357,3 \text{ Nm},$$

potem jego moment maksymalny

$$M_{\max n} = \lambda_n \cdot M_n = 2,24 \cdot 357,3 = 800,3 \text{ Nm}.$$

Moment rozruchowy wystąpi przy poślizgu  $s = 1$ . Zatem dla temperatury uzwojeń  $40^\circ\text{C}$

$$M_{kn} = \frac{2M_{\max n}}{\frac{1}{s_{kn}} + s_{kn}} = \frac{2 \cdot 800,3}{\frac{1}{0,08489} + 0,08489} = 134,9 \text{ Nm},$$

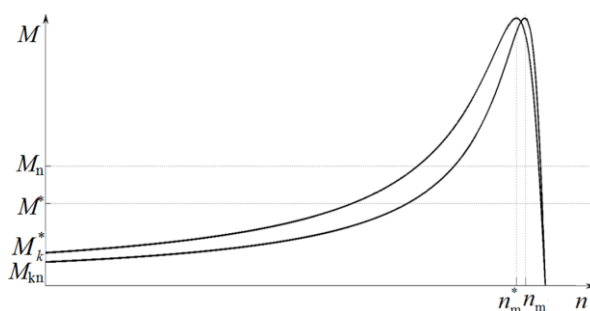
natomiast dla temperatury uzwojeń  $150^\circ\text{C}$

$$M_k^* = \frac{2M_{\max n}}{\frac{1}{s_k^*} + s_k^*} = \frac{2 \cdot 800,3}{\frac{1}{0,1188} + 0,1188} = 187,6 \text{ Nm}.$$

Procentową różnicę momentów rozruchowych wyznacza się ze wzoru

$$\frac{M_k^* - M_{kn}}{M_{kn}} \cdot 100\% = \frac{187,6 - 134,9}{134,9} \cdot 100\% = 39,05\%.$$

Charakterystyki mechaniczne silnika przy zimnych i nagranych uzwojeniach pokazano na rysunku O1.

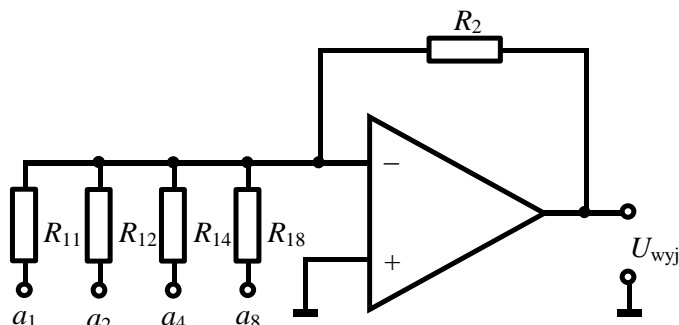


Rys. O1

Przy temperaturze uzwojeń  $150^\circ\text{C}$  moment rozruchowy będzie większy o około 39%. Należy zaznaczyć, że wynik ten jest obciążony znacznym błędem ze względu na stosowanie wzoru Klossa do silnika klatkowego, w którym przy dużych poślizgach występuje wypieranie prądu w klatce wirnika, co powoduje zmianę parametrów schematu zastępczego silnika.

### Zadanie 3

Dany jest przetwornik cyfrowo-analogowy o schemacie przedstawionym na rysunku 1, zamieniający dowolną, czterobitową liczbę, przedstawioną w naturalnym kodzie dwójkowym, na odpowiadający jej analogowy sygnał napięciowy. Dobierz rezystancję rezystorów wejściowych oraz wyznacz zdolność rozdzielczą przetwornika, czyli wartość zmiany napięcia wyjściowego przetwornika przy zmianie wartości cyfrowego sygnału wejściowego o jeden. Poziom wysoki sygnał cyfrowy (jedynek logicznych) wynosi  $-5\text{ V}$ , a poziom niski (zera logiczne)  $0\text{ V}$ . Maksymalny analogowy sygnał wyjściowy przetwornika powinien być równy  $10\text{ V}$ . Rezystor w pętli sprzężenia zwrotnego wzmacniacza operacyjnego ma wartość  $R_2 = 10\text{ k}\Omega$ . Przyjmij, że dysponujesz rezystorami o dowolnej wartości.



Rys. 1. Schemat przetwornika

### Rozwiązanie

Poszczególne cyfry liczby binarnej  $a_1, \dots, a_8$  muszą być zamieniane na sygnał analogowy z uwzględnieniem wagi, zależnej od miejsca pozycyjnego danej cyfry. Jeżeli cyfrę  $a_1$  dodamy wagą 1, to cyfrę  $a_2$  musimy dodać z wagą 2, cyfrę  $a_4$  z wagą 4 a cyfrę  $a_8$  z wagą 8. Niech wartość  $R_{11}$  równa się  $R$ , to wtedy wartość  $R_{12} = R/2$ ,  $R_{14} = R/4$ ,  $R_{18} = R/8$ . Największy sygnał analogowy wystąpi przy liczbie binarnej równej 1111.

Stąd

$$U_{\text{wyj max}} = -(-5) \cdot \frac{R_2}{R} (1 + 2 + 4 + 8) = 75 \cdot \frac{R_2}{R}.$$

Z drugiej strony  $U_{\text{wyj max}} = 10\text{ V}$ . A zatem

$$\frac{R_2}{R} = \frac{10,00}{75,00}.$$

Jeżeli  $R_2 = 10,00\text{ k}\Omega$ , to  $R = 75,00\text{ k}\Omega$ , a więc:

$$R_{11} = 75,00\text{ k}\Omega,$$

$$R_{12} = 75/2 = 37,50\text{ k}\Omega,$$

$$R_{14} = 75/4 = 18,75\text{ k}\Omega,$$

$$R_{18} = 75/8 = 9,375\text{ k}\Omega.$$

Ze względu na liniowość przetwornika jego rozdzielczość określa liczba binarna 0001

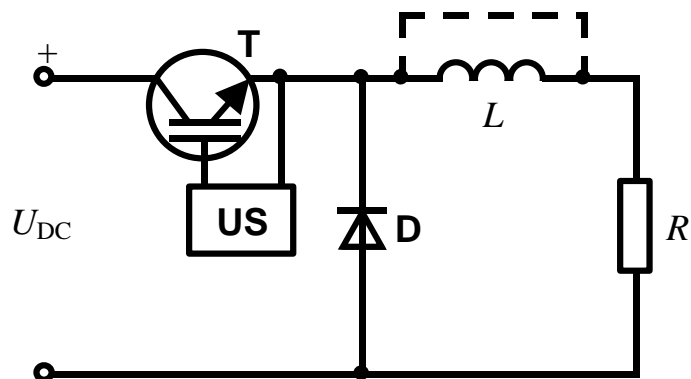
$$\Delta U_{\text{wyj}} = -(-5) \cdot \frac{R_2}{R_{11}} = 5 \cdot \frac{10,00}{75,00} = 0,6667\text{ V}.$$

Z taką dokładnością przyjmuje swoje wartości napięcie wyjściowe przetwornika.

### Zadanie 4

Do ogrzewania zajezdni tramwajowej wykorzystano grzejnik o mocy znamionowej  $P_n = 6\text{ kW}$  i o rezystancji w stanie nagrzanym równej  $R = 40\text{ }\Omega$ . Grzejnik zasilany jest z tramwajowej sieci trakcyjnej prądu stałego o napięciu równym  $U_{\text{DC}} = 660\text{ V}$  za pośrednictwem tranzystorowego przekształtnika impulsowego DC/DC, wykorzystującego modulację szerokości impulsów (rys. 2). Dla ułatwienia eksploatacji grzejnika na potencjometrze (wewnątrz modułu US) do regulacji wydajności ogrzewania oznaczono cztery

punkty, określające moc grzejnika przy znamionowym napięciu zasilania: 0 kW, 2 kW, 4 kW i 6 kW. Po pewnym czasie uległ awarii dławik wygładzający przekształtnika (przerwa w uzwojeniu). Postanowiono dławik zewrzeć i prowadzić eksploatację grzejnika w układzie bez dławika wygładzającego. Wyznacz nowe wartości mocy, odpowiadające punktom zaznaczonym na potencjometrze regulacyjnym. Załóż, że napięcie zasilania przekształtnika i wartość rezystancji grzejnika są stałe i równe wartościom znamionowym. Ponadto przyjmij, że w układzie z dławikiem wygładzającym częstotliwość przełączeń była równa  $f_{PWM} = 1000$  Hz, a indukcyjność  $L$  cewki była tak dobrana, że prąd płynący przez rezystor był ciągły i idealnie wygładzony, a także że rezystancja tranzystora w stanie przewodzenia i rezystancja przewodów łączeniowych są równe zeru.



Rys. 2. Schemat zasilania grzejnika

### Rozwiązanie

W przypadku obciążenia rezystancyjnego moc  $P$  wydzielaną na rezystorze  $R$  można obliczyć ze wzoru

$$P = \frac{U_{RMS}^2}{R},$$

w którym  $U_{RMS}$  – wartość skuteczna napięcia na rezystorze.

Z drugiej strony dla przekształtnika impulsowego DC/DC współczynnik szerokości impulsów określa zależność

$$d = \frac{U_{AV}}{U_{DC}},$$

w której  $U_{DC} = 660$  V (napięcie zasilania układu), a  $U_{AV}$  – wartość średnia napięcia na rezystorze. Przy ciągłym i idealnie wygładzonym prądzie jego wartość skuteczna jest równa wartości średniej  $U_{RMS} = U_{AV}$  i na podstawie obu powyższych równań można zapisać dla układu z dławikiem wygładzającym

$$d = \frac{\sqrt{PR}}{U_{DC}}.$$

Poszczególnym mocom zaznaczonym na potencjometrze regulacyjnym można przypisać następujące wartości współczynnika szerokości impulsów:

$$P_1 = 0 \text{ kW} \Rightarrow d_1 = 0;$$

$$P_2 = 2 \text{ kW} \Rightarrow d_2 = 0,4285;$$

$$P_3 = 4 \text{ kW} \Rightarrow d_3 = 0,6061;$$

$$P_4 = 6 \text{ kW} \Rightarrow d_4 = 0,7423.$$

Po zwarceniu dławika wartości współczynnika wypełnienia impulsów nie uległy zmianie. Nie zmieni się też wartość średnia napięcia na rezystorze  $U_{AV}$ . Zmieni się natomiast jego wartość skuteczna

$$U_{\text{RMS}}^* = \sqrt{\frac{\int_0^T u^2 \cdot dt}{T}}.$$

Ponieważ przebieg napięcia jest prostokątny, całkowanie można zastąpić mnożeniem

$$U_{\text{RMS}}^* = \sqrt{\frac{U_{\text{DC}}^2 \cdot d \cdot T}{T}} = U_{\text{DC}} \sqrt{d}.$$

Na tej podstawie moc wydzielaną na rezystorze można wyznaczyć ze wzoru

$$P^* = \frac{U_{\text{RMS}}^2}{R} = \frac{U_{\text{DC}}^2}{R} d.$$

Po wykonaniu obliczeń uzyskamy:

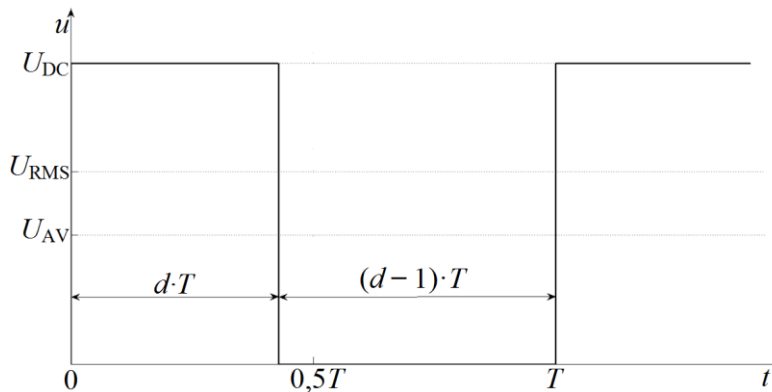
$$P_1^* = 0 \text{ kW};$$

$$P_2^* = 4,667 \text{ kW};$$

$$P_3^* = 6,600 \text{ kW};$$

$$P_4^* = 8,083 \text{ kW}.$$

Przykładowe wyniki obliczeń przedstawiono w formie graficznej na rysunku O2 dla  $d_2 = 0,4285$ .



Rys. O2

Jak widać, wartość skuteczna  $U_{\text{RMS}}$  analizowanego przebiegu napięcia jest znacznie wyższa od jego wartości średniej  $U_{\text{AV}}$ . To sprawia, że przy prądzie przerywanym wzrasta moc wydzielana w grzejniku. Dla nastawy 2 kW moc grzejnika wzrosła ponad dwukrotnie, a dla nastawy wynoszącej 4 kW przekroczona została moc znamionowa grzejnika, wynosząca  $P_n = 6 \text{ kW}$ . Zwiększyła się też wartość maksymalna prądu, która w tym przypadku wynosi

$$I_{\text{max}}^* = \frac{660}{40} = 16,50 \text{ A},$$

w porównaniu z wartością znamionową prądu, który w układzie z dławikiem jest równy

$$I_n = \sqrt{\frac{P_n}{R}} = \sqrt{\frac{6000}{40}} = 12,25 \text{ A}.$$

Ze względu na bezwładność cieplną grzejnika chwilowa wartość maksymalna prądu  $I_{\text{max}}^*$  nie jest dla grzejnika groźna (ze względu na krótki czas jej trwania). Może jednak ona okazać się szkodliwa dla tranzystora w przypadku przekroczenia jego parametrów znamionowych. Szybkie zmiany prądu obciążenia mogą być ponadto źródłem zakłóceń radioelektrycznych. Dlatego eksploatacja układu bez dławika nie jest wskazana.

### Zadanie 5

Odbiornik trójfazowy jest zasilany 5-żyłowym przewodem miedzianym w izolacji polwinitowej (obciążone są trzy żyły przewodu), o przekroju każdej żyły  $50 \text{ mm}^2$ . Instalacja jest wykonana w ten sposób, że długotrwała obciążalność prądowa żył wynosi  $I_Z = 134 \text{ A}$ , przy znamionowej temperaturze otoczenia równej  $\vartheta_{on} = 30^\circ\text{C}$ . Odbiornik przewidziany jest do pracy dorywczej (krótkookresowej), trwającej 5 minut. Wyznacz największą wartość prądu, którą może pobierać ten odbiornik przy pracy dorywczej, tak aby nie przekroczyć temperatury granicznej, dopuszczalnej długotrwale, która dla tego typu przewodów wynosi  $\vartheta_{dd} = 70^\circ\text{C}$ . Do obliczeń przyjmij, że maksymalna temperatura otoczenia wynosi  $\Delta\vartheta_o = \Delta\vartheta_{on} = 30^\circ\text{C}$ . Ciepłota stała czasowa przewodów wynosi  $\tau = 660 \text{ s}$ .

Wskazówka:

Praca dorywcza urządzenia elektrycznego charakteryzuje się tym, że trwa ona przez tak krótki czas, że urządzenie nie osiąga temperatury ustalonej (ustalonego przyrostu temperatury). Po tym czasie pracy następuje przerwa trwająca tak długo, aż urządzenie osiągnie temperaturę otoczenia.

Krzywą nagrzewania przewodu opisuje równanie

$$\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_o = \Delta\vartheta_{ust} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

w którym:  $\tau$  – ciepłota stała czasowa przewodów,  $\Delta\vartheta$  – przyrost temperatury przewodu,  $\Delta\vartheta_{ust}$  – ustalony przyrost temperatury przewodu,  $\vartheta$  – temperatura przewodu,  $\vartheta_o$  – temperatura otoczenia.

### Rozwiązanie

Krzywą nagrzewania przewodu opisuje równanie

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_{ust} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

w którym:  $\Delta\vartheta$  – przyrost temperatury

$$\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_o,$$

gdzie:  $\vartheta$  – temperatura przewodu,  $\vartheta_o$  – temperatura otoczenia (jej znamionowa wartość dla przewodów w powietrzu wynosi  $\vartheta_{on} = 30^\circ\text{C}$ ). Przyjmuje się, że przewód osiąga ustalony przyrost temperatury po czasie równym  $(3 \div 5) \cdot \tau$ .

W warunkach znamionowych ( $\vartheta_{on} = 30^\circ\text{C}$  oraz  $\vartheta_{dd} = 70^\circ\text{C}$ ) ustalony przyrost temperatury dopuszczalny długotrwale wyniesie  $\Delta\vartheta_{ustn} = \Delta\vartheta_{dd} = 40 \text{ K}$ . Ustalony przyrost temperatury  $\Delta\vartheta_{ust}$  jest proporcjonalny do strat mocy w przewodzie, a zatem do kwadratu prądu płynącego w przewodzie

$$\Delta\vartheta_{ust} = c_p \cdot \Delta P = c_I \cdot I^2.$$

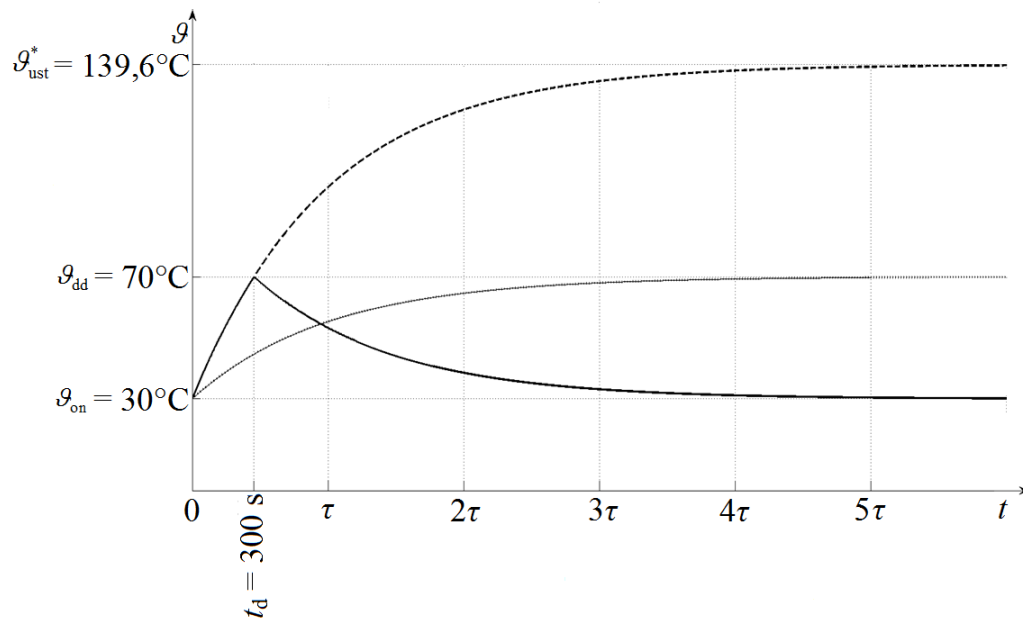
W warunkach podanych w zadaniu, przy pracy dorywczej, początkowy przyrost temperatury (w pierwszej chwili po załączeniu prądu) wynosi  $0 \text{ K}$ , a zatem w tych warunkach dopuszczalny przyrost temperatury wyniesie  $\Delta\vartheta_d^* = 40 \text{ K}$ , tak aby temperatura przewodu nie przekroczyła wartości temperatury dopuszczalnej długotrwale  $\vartheta_{dd} = 70^\circ\text{C}$ . Na tej podstawie możemy napisać równanie dla krzywej nagrzewania przy pracy dorywczej

$$\Delta\vartheta_d^* = \Delta\vartheta_{ust}^* \left( 1 - e^{-\frac{t_d}{\tau}} \right) = 40,00 \text{ K},$$

w którym czas pracy dorywczej wynosi  $t_d = 5 \text{ min} = 300 \text{ s}$ . Ustalony przyrost temperatury przy pracy dorywczej  $\Delta\vartheta_{ust}^*$  wyniesie

$$\Delta \vartheta_{ust}^* = \frac{\Delta \vartheta_d^*}{\left(1 - e^{-\frac{t_d}{\tau}}\right)} = \frac{40,00}{\left(1 - e^{-\frac{300}{660}}\right)} = 109,5 \text{ K}.$$

Oczywiście odpowiednie wartości temperatur będą większe od przyrostów temperatury o znamionową temperaturę otoczenia  $\vartheta_{on} = 30^\circ\text{C}$  (rys. O3).



Rys. O3

Jak widać, ustalony przyrost temperatury przy pracy dorywczej  $\Delta \vartheta_{ust}^*$  jest znacznie większy od ustalonego przyrostu temperatury dopuszczalnego długotrwale, a dopuszczalna wartość prądu przy pracy dorywczej, trwającej  $t_d = 5 \text{ min} = 300 \text{ s}$ , wyniesie

$$I_d^* = I_z \sqrt{\frac{\Delta \vartheta_{ust}^*}{\Delta \vartheta_{ustn}}} = 134,0 \sqrt{\frac{109,5}{40,00}} = 221,7 \text{ A}.$$

Tak duża wartość prądu przy pracy dorywczej  $I_d^* = 221,7 \text{ A}$  uwarunkowana jest krótkim czasem trwania obciążenia, mniejszym od cieplnej stałej czasowej przewodu.

**Opracował**  
dr inż. Mirosław Miszewski  
PESA Bydgoszcz SA

**Sprawdził**  
dr inż. Sławomir Cieślik  
UTP Bydgoszcz

**Zatwierdził**  
Przewodniczący  
Rady Naukowej Olimpiady  
dr inż. Sławomir Cieślik