



„EUROELEKTRA”
Ogólnopolska Olimpiada Wiedzy Elektrycznej i Elektronicznej
Rok szkolny 2018/2019

Zadania z elektrotechniki na zawody III stopnia
z rozwiązaniami

Instrukcja dla zdającego

1. Czas trwania zawodów: 120 minut.
2. III stopień Olimpiady zawiera 5 zadań otwartych.
3. Należy podać poprawną odpowiedź wraz tokiem rozwiązania.
4. Za każdą prawidłową odpowiedź uzyskuje się maksymalnie 10 punktów. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za 5 zadań to 50 punktów.
5. Można korzystać z przyborów do pisania, rozdawanych kart czystopisu i brudnopisu, kalkulatorów i tablic matematycznych. Korzystanie z notebooków, tabletów, telefonów komórkowych, smartfonów, smartwatchy, kalkulatorów programowalnych, itp. jest zabronione.

Życzymy powodzenia!

Zadanie nr 1

Dany jest transformator jednofazowy, który zaprojektowano i zbudowano na napięciu znamionowe $U_n = 400 \text{ V}$ i częstotliwość $f_n = 100 \text{ Hz}$. Czy, taki transformator, ze względu na wartość prądu magnesowania i wartość strat w rdzeniu (żelazie), można włączyć do pracy w sieci o napięciu $U_s = 400 \text{ V}$ i częstotliwość $f_s = 50 \text{ Hz}$? Odpowiedź należy merytorycznie uzasadnić.

Rozwiązanie

Założenie równości napięć, odpowiednio znamionowego transformatora U_n i sieci U_s

$$U_n = U_s$$

oznacza równość SEM indukowanych E_s i E_n w uzwojeniu zasilanym (pierwotnym).

Przy czym zgodnie z prawem Faraday'a SEM indukowana jest proporcjonalna do iloczynu wartości indukcji B w kolumnie i częstotliwości napięcia zasilania f :

$U_n = 400 \text{ V } f_n = 100 \text{ Hz}$	$U_s = 400 \text{ V } f_s = 50 \text{ Hz}$
$U_n \cong E_n = 4,44 \cdot B_n \cdot S_{Fe} \cdot f_n \cdot z$	$U_s \cong E_s = 4,44 \cdot B_s \cdot S_{Fe} \cdot f_s \cdot z$
$E_n \propto B_n \cdot f_n$	$E_s \propto B_s \cdot f_s$

Przy czym, S_{Fe} - powierzchnia przekroju rdzenia kolumny transformatora.

Przy projektowaniu/budowie klasycznych transformatorów nie można przyjąć dowolnej wartości indukcji w rdzeniu, ze względu na zjawisko nasycenia rdzenia i straty w rdzeniu.

Zatem

$$B_n \cdot f_n = B_s \cdot f_s$$

$$B_s = B_n \cdot \frac{f_n}{f_s}$$

Podstawiając wartości częstotliwości:

$$B_s = B_n \frac{100}{50} = 2 \cdot B_n$$

stwierdzamy, że indukcja w kolumnie/rdzeniu wzrosła 2-krotnie. Optymalna praca znamionowa transformatora odpowiada punktowi na kolanie charakterystyki magnesowania. Wzrost 2-krotny indukcji pociąga za sobą bardzo silne nasycenie rdzenia i w konsekwencji kilkakrotny wzrost prądu magnesowania transformatora. Można się spodziewać, że wartość tego prądu może przekroczyć nawet wartość prądu znamionowego transformatora. Zatem, ze względu na tak znaczny wzrost prądu magnesowania praca rozważanego transformatora nie jest możliwa.

Należy rozważyć jeszcze straty w rdzeniu, ze względu na ich zależność od indukcji i od częstotliwości napięcia zasilania. Zgodnie z zależnościami, podanymi przez Steinmetza, straty w rdzeniu dzielimy na straty na histerezę i prądy wirowe:

- zasilanie sieciowe

$$\Delta P_{Fes} = \Delta P_{hs} + \Delta P_{ws}$$

$$\Delta P_{Fes} = c_h \cdot B_s^2 \cdot f_s + c_w \cdot (B_s \cdot f_s)^2$$

- zasilanie znamionowe

$$\Delta P_{Fen} = \Delta P_{hn} + \Delta P_{wn}$$

$$\Delta P_{Fen} = c_h \cdot B_n^2 \cdot f_n + c_w \cdot (B_n \cdot f_n)^2$$

Ze względu na zależność

$$B_n \cdot f_n = B_s \cdot f_s$$

straty na prądy wirowe nie ulegają zmianie - indukcja wzrosła 2-krotnie, ale częstotliwość maleje 2-krotnie, zatem:

$$P_{wn} = \Delta P_{ws}$$

Natomiast straty na histerezę:

$$\Delta P_{hs} = c_h \cdot B_s^2 \cdot f_s = c_h \cdot \left(B_n \cdot \frac{f_n}{f_s} \right)^2 \cdot f_s = c_h \cdot B_n^2 \cdot f_n \cdot \frac{f_n}{f_s} = \Delta P_{hn} \cdot \frac{f_n}{f_s} = \Delta P_{hn} \cdot \frac{100}{50} = 2 \cdot \Delta P_{hn}$$

wzrosły dwukrotnie.

Straty całkowite w rdzeniu przy zasilaniu z sieci:

$$\Delta P_{Fes} = \Delta P_{hs} + \Delta P_{ws} = 2 \cdot \Delta P_{hn} + \Delta P_{wn} = \Delta P_{hn} + (\Delta P_{hn} + \Delta P_{wn}) = \Delta P_{Fen} + \Delta P_{hn}$$

zatem

$$\Delta P_{Fes} = \Delta P_{Fen} + \Delta P_{hn}$$

$$\Delta P_{Fes} > \Delta P_{Fen}$$

Wniosek końcowy: Ze względu na dwukrotny wzrost indukcji w rdzeniu:

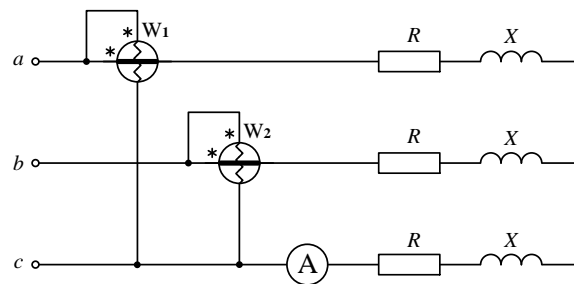
- wystąpi znaczący wzrost wartości prądu magnesowania - efekt nasycenia rdzenia,
- wystąpi dwukrotny wzrost wartości strat na histerezę w rdzeniu (żelazie).

Zatem, nie można włączyć rozważanego transformatora do pracy w sieci o napięciu

$U_s = 400 \text{ V}$ i częstotliwość $f_s = 50 \text{ Hz}$.

Zadanie nr 2

Symetryczny obwód trójfazowy, którego schemat przedstawiony został na rysunku 1, zasilony jest symetrycznym zgodnym systemem napięć o nieznanej wartości przewodowej (międzyfazowej) napięcia. W obwodzie zainstalowano dwa watomierze w układzie pomiarowym Arona oraz amperomierz (należy założyć, że mierniki są idealne). Przyrządy te pokazują następujące wartości $P_1 = 572 \text{ W}$, $P_2 = 388 \text{ W}$ i $I_A = 1,46 \text{ A}$.



Rys. 1.

Wyznaczyć wskazania przyrządów w sytuacji, gdy w fazie „a” odbiornik zostanie zwarty.

Rozwiązanie

Układ pomiarowy Arona zainstalowany w symetrycznym obwodzie trójfazowym zasilanym trójprzewodowo umożliwia wyznaczenie:

1. Moc czynnej wydzielanej w obwodzie jako sumę wskazań watomierzy układu pomiarowego:

$$P = P_1 + P_2, \quad (1)$$

2. Charakteru odbiornika trójfazowego, a konkretnie stosunku reaktancji do rezystancji w każdej fazie odbiornika:

$$\frac{X}{R} = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}. \quad (2)$$

W związku z tym moc czynna wydzielana w obwodzie

$$P = 572 + 388 = 960 \text{ W}. \quad (3)$$

Tangens kąta fazowego odbiornika, jako stosunek reaktancji do rezystancji połączonych szeregowo, jest równy

$$\tan \varphi = \frac{X}{R} = \sqrt{3} \frac{572-388}{572+388} \approx 0,332. \quad (4)$$

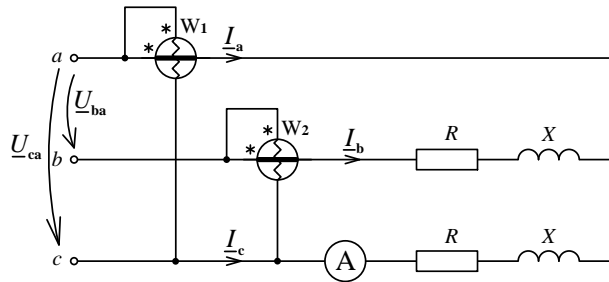
Z warunku symetrii obwodu wynika, że moc tę można wyrazić jako

$$P = 3RI_A^2 \Rightarrow R = \frac{P}{3I_A^2} = \frac{960}{3 \cdot 1,46^2} = 150,12 \, \Omega. \quad (5)$$

Można wobec tego obliczyć reaktancję X w każdej fazie odbiornika

$$X = R \cdot \tan \varphi = 150,12 \cdot 0,332 = 49,84 \, \Omega \quad (6)$$

Na podstawie znajomości wartości rezystancji oraz reaktancji odbiornika, można teraz obliczyć wskazania przyrządów. Schemat obwodu po zwarciu fazy „A” odbiornika przedstawia się następująco:



Założmy teraz, że

$$\underline{U}_{ab} = 400e^{j30^\circ} \text{ V}, \quad \underline{U}_{bc} = 400e^{-j90^\circ} \text{ V}, \quad \underline{U}_{ca} = 400e^{j150^\circ} \text{ V}. \quad (7)$$

W związku z tym prądy przewodowe (i jednocześnie fazowe) są równe:

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{U}_{ca}}{R+jX} = \frac{400e^{j150^\circ}}{150,12+j49,84} = 2,53e^{j131,64^\circ} \text{ A}, \quad (8)$$

$$\underline{I}_b = \frac{\underline{U}_{ba}}{R+jX} = -\frac{\underline{U}_{ab}}{R+jX} = \frac{400e^{-j150^\circ}}{150,12+j49,84} = 2,53e^{-j168,36^\circ} \text{ A}, \quad (9)$$

$$\underline{I}_a = -(\underline{I}_b + \underline{I}_c) = -(2,53e^{-j168,36^\circ} + 2,53e^{j131,64^\circ}) = 4,38e^{-j18,36^\circ} \text{ A}. \quad (10)$$

Amperomierz wskazuje więc moduł prądu \underline{I}_c czyli 2,53 A. Wskazanie watomierzy można zaś obliczyć następująco:

$$P_1 = \operatorname{Re}[\underline{U}_{ac} \cdot \underline{I}_a^*] = \operatorname{Re}[-\underline{U}_{ca} \cdot \underline{I}_a^*] = \operatorname{Re}[-400e^{j150^\circ} \cdot 4,38e^{j18,36^\circ}] = 1716 \text{ W}, \quad (11)$$

$$P_2 = \operatorname{Re}[\underline{U}_{bc} \cdot \underline{I}_a^*] = \operatorname{Re}[400e^{-j90^\circ} \cdot 2,53e^{j168,36^\circ}] = 204 \text{ W}. \quad (12)$$

Poprawność rozwiązania sprawdzić można sprawdzając moc czynną wydzielaną w obwodzie i porównując ją z sumą wskazań watomierzy

$$P_R = R \cdot (I_b^2 + I_c^2) = 2 \cdot 150,12 \cdot 2,53^2 = 1920 \text{ W. (13)}$$

$$P_1 + P_2 = 1716 + 204 = 1920 \text{ W. (14)}$$

Odpowiedź

$$P_1 = 1716 \text{ W,}$$

$$P_2 = 204 \text{ W,}$$

$$I_A \approx 2,53 \text{ V.}$$

Zadanie nr 3

Oświetlenie statku zasilane jest z trójfazowej prądnicy synchronicznej z wirnikiem cylindrycznym o napięciu znamionowym $U_n = 400 \text{ V}$. Prąd oddawany przez prądnicę przy włączeniu wszystkich żarówek i znamionowym napięciu na zaciskach maszyny wynosi $I = 100 \text{ A}$. Określić wartość napięcia, które pojawi się na zaciskach prądnicy oraz prąd obciążenia, jeżeli 50% żarówek zostanie wyłączonych. W obu przypadkach prąd wzbudzenia ma taką samą wartość (nie uległ zmianie) i obciążenie faz jest symetryczne. Uzwojenie stojana (twornika) połączone jest w gwiazdę, a reaktancja synchroniczna jednej fazy uzwojenia $X_s = 2,40 \Omega$.

Do obliczeń pominąć: rezystancję uzwojenia twornika i zjawisko nasycenia obwodu magnetycznego prądnicy.

Rozwiązanie

Układ żarówek stanowi odbiornik o charakterze rezystancyjnym. Zatem prąd i napięcie twornika są w fazie, tzn. współczynnik mocy $\cos\varphi = 1$.

Podstawą obliczeń jest sporządzenie wykresu fazorowego (rys. poniżej) prądnicy dla współczynnika mocy $\cos\varphi = 1$.

Rezystancja obciążenia jednej fazy przy włączaniu wszystkich żarówek

$$R = \frac{U_n}{\sqrt{3}I} = \frac{400}{\sqrt{3} \cdot 100} = 2,31 \Omega$$

Rezystancja obciążenia jednej fazy po wyłączeniu 50% żarówek

$$R_x = R \frac{100}{50} = 2R = 2 \cdot 2,31 = 4,62 \Omega$$

Do wyznaczenia napięcia prądnicy po wyłączeniu 50% żarówek konieczna jest znajomość wartości SEM E_0 indukowanej strumieniem wzbudzenia w uzwojeniu twornika.

Wartości SEM E_0 wyznaczamy z równania opisującego zależności w trójkącie prostokątnym wykresu fazorowego

$$E_0 = \sqrt{U_n^2 + (\sqrt{3} \cdot I \cdot X_s)^2} = \sqrt{400^2 + (\sqrt{3} \cdot 100 \cdot 2,4)^2} = 576,4 \text{ V}$$

Dla obu przypadków obciążenia prądnicy prąd wzbudzenia ma taką samą wartość (nie uległ zmianie), zatem SEM E_0 też nie uległa zmianie.

Napięcie na zaciskach prądnicy po wyłączeniu 50% żarówek, zgodnie z wykresem fazorowym, wyznaczamy z równania opisującego zależności w trójkącie prostokątnym (rys. poniżej)

$$U_x^2 = E_0^2 - (\sqrt{3} \cdot I_x \cdot X_s)^2 = E_0^2 - \left(\sqrt{3} \frac{U_x}{\sqrt{3} \cdot R_x} \right)^2$$

gdzie, prąd obciążenia prądnicy

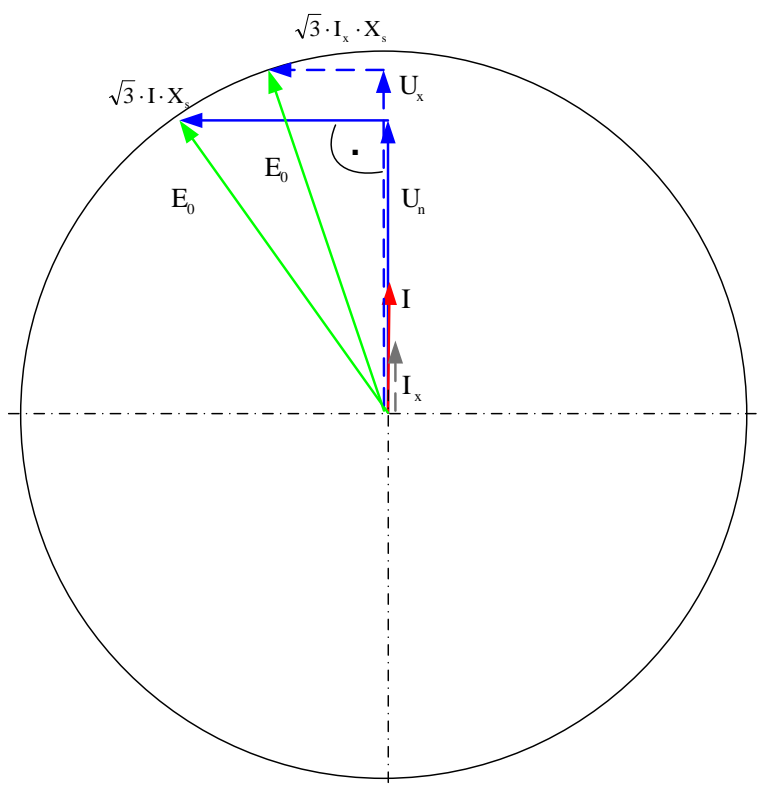
$$I_x = \frac{U_x}{\sqrt{3} \cdot R_x}$$

Po przekształceniu powyższego równania otrzymamy

$$U_x = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_s}{R_x}\right)^2}} = \frac{576,4}{\sqrt{1 + \left(\frac{2,4}{4,62}\right)^2}} = 510V$$

Zatem gdzie, prąd obciążenia prądnicy

$$I_x = \frac{510}{\sqrt{3} \cdot 4,62_x} = 63,8A$$



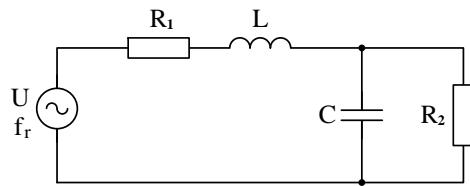
Zadanie nr 4

W obwodzie, którego schemat przedstawiony został na rysunku 2, występuje rezonans (zasilające napięcie sinusoidalne jest w fazie z prądem pobieranym ze źródła). Elementy występujące w obwodzie posiadają następujące wartości: $R_1 = 33,3 \Omega$; $R_2 = 600 \Omega$; $L = 20 \text{ mH}$; $C = 500 \mu\text{F}$.

Obliczyć wartości skuteczne:

- prądu przepływającego przez indukcyjność,
- napięcia występującego na pojemności,

gdy wartość skuteczna napięcia zasilającego jest równa $U = 10 \text{ V}$.



Rys. 2.

Rozwiązanie

Przed wszystkim należy wyznaczyć częstotliwość napięcia sinusoidalnego zasilającego obwód, przy której w obwodzie wystąpi rezonans. W tym celu wyznaczyć należy impedancję zespoloną obwodu z punktu widzenia zacisków wejściowych:

$$\underline{Z} = R_1 + j\omega L + \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = R_1 + j\omega L + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} = \dots = R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} + j\omega \left[L - \frac{R_2^2 C}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} \right] \quad (1)$$

Warunkiem rezonansu, jak wiadomo, jest zerowanie się części urojonej impedancji zespolonej

$$\text{Im}(\underline{Z}) = L - \frac{R_2^2 C}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R_2^2 C^2}} \quad (2)$$

Podstawienie danych prowadzi do

$$\omega_r = 316,21 \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} \approx 50,326 \text{ Hz.} \quad (3)$$

Teraz można wyznaczyć impedancje zespolone \underline{Z}_1 i \underline{Z}_2 , które połączone szeregowo tworzą impedancję \underline{Z} obwodu:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega_r L = 33,33 + j6,324 \, \Omega, \quad (4)$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2 \frac{1}{j\omega_r C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega_r C}} = 0,067 - j6,324 \, \Omega, \quad (5)$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 33,367 \, \Omega. \quad (6)$$

To pozwala obliczyć prąd pobierany z zasilacza:

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}} = \frac{10}{33,367} = 0,3 \text{ A} = 300 \text{ mA}, \quad (7)$$

oraz

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I} = 0,02 - j1,895 \approx 1,9e^{-89,4^\circ} \text{ V. (8)}$$

Odpowiedź

$$I_L = 300 \text{ mA,}$$

$$U_C = 1,9 \text{ V.}$$

Zadanie nr 5

Trójfazowy silnika asynchroniczny (indukcyjny) klatkowy ma następujące dane znamionowe: moc $P_n = 8,0 \text{ kW}$; napięcie $U_n = 400 \text{ V } (\Delta)$; prędkość $n_n = 960 \text{ obr/min}$, sprawność $\eta_n = 86\%$; współczynnik mocy $\cos \varphi_n = 0,82$; liczbę par biegunów $p = 3$; częstotliwość $f_n = 50 \text{ Hz}$; przeciążalność momentem $p_m = 2,0$ (wartość względna).

Wyznaczyć wartości następujących wielkości: poślizg znamionowy s_n ; prąd znamionowy I_n ; moment znamionowy M_n ; moment krytyczny (maksymalny) M_m , moment rozruchowy M_r .

Na podstawie wyników obliczeń naszkicować kształt charakterystyki mechanicznej rozważanego silnika.

Rozwiązanie

Poślizg znamionowy

$$s_n = \frac{n_s - n_n}{n_s} = \frac{1000 - 960}{1000} = 0,04$$

gdzie, prędkość synchroniczna

$$n_s = \frac{60 f_n}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ obr/min}$$

prąd znamionowy

$$I_n = \frac{P_n}{\sqrt{3} U_n \cos \varphi_n \eta_n} = \frac{8 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 0,82 \cdot 0,86} = 16,37 \text{ A}$$

moment znamionowy

$$M_n = \frac{P_n}{2\pi n_n / 60} = \frac{8 \cdot 10^3}{2\pi 960 / 60} = 79,87 \text{ Nm}$$

moment krytyczny (maksymalny)

$$p_m = \frac{M_m}{M_n} \quad M_m = p_m M_n = 2,0 \cdot 79,87 = 159,75 \text{ Nm}$$

W praktyce do wyznaczenia charakterystyki mechanicznej silnika asynchronicznego w funkcji poślizgu $M = M(s)$ posługujemy się uproszczonym wzorem Klossa:

$$M = 2M_m / \left(\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s} \right) \quad \text{lub} \quad \frac{M}{M_m} = 2 / \left(\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s} \right)$$

Aby wyznaczyć poślizg krytyczny s_k przyjmujemy we wzorze Klossa $M = M_n$ i $s = s_n$ oraz podstawiamy w tym wzorze w miejsce $\frac{M}{M_m}$ zależność $\frac{M_n}{M_m} = \frac{1}{p_m}$.

Następnie przekształcamy wzór Klossa do postaci:

$$s_k = s_n \left[p_m + \sqrt{p_m^2 - 1} \right]$$

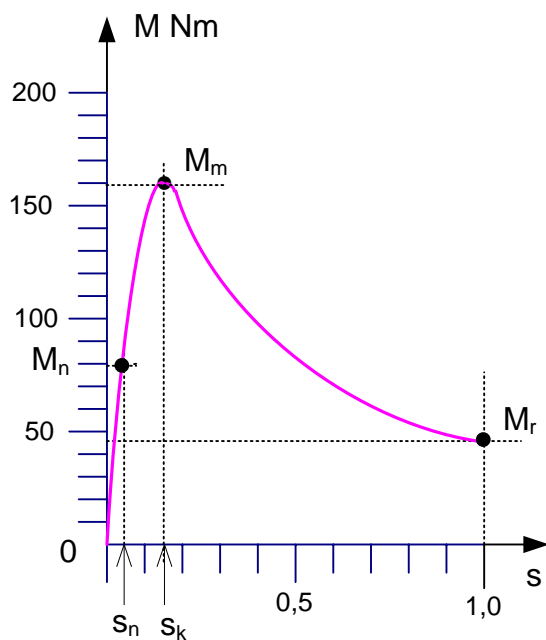
zatem wartość poślizgu krytycznego wynosi

$$s_k = 0,04 \left[2,0 + \sqrt{2,0^2 - 1} \right] = 0,1493$$

Wg wzoru Klossa wartość znamionowa momentu rozruchowego odpowiada wartość $s = 1$

$$M_r = \frac{2 \cdot M_m}{\frac{1}{s_k} + \frac{s_k}{1}} = 2 \cdot M_m \cdot \frac{s_k}{1 + s_k^2} = 2 \cdot 159,75 \frac{0,1493}{1 + 0,1493^2} = 46,66 \text{ Nm}$$

Zatem współrzędne dla trzech punktów charakterystycznych zostały wyznaczone. Szkic charakterystyki rozważanego silnika przedstawia poniższy rysunek.



Wyniki:

poślizg znamionowy $s_n = 0,04$

prąd znamionowy $I_n = 16,37 \text{ A}$

moment znamionowy $M_n = 79,87 \text{ Nm}$

moment krytyczny (maksymalny) $M_m = 159,75 \text{ Nm}$

poślizg krytyczny $s_k = 0,1493$

moment rozruchowy $M_r = 46,66 \text{ Nm}$

Opracowali: dr hab. inż. Mieczysław Ronkowski, prof. PG dr inż. Andrzej Skiba mgr inż. Marek Kamiński	Sprawdził: dr inż. Sławomir Cieślík, prof. UTP	Zatwierdził: Przewodniczący Rady Naukowej Olimpiady dr hab. inż. Sławomir Cieślík, prof. UTP
---	--	--